كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : كهرباء ومغناطيسية ١

المحاضرة : الثالثة /نظري/

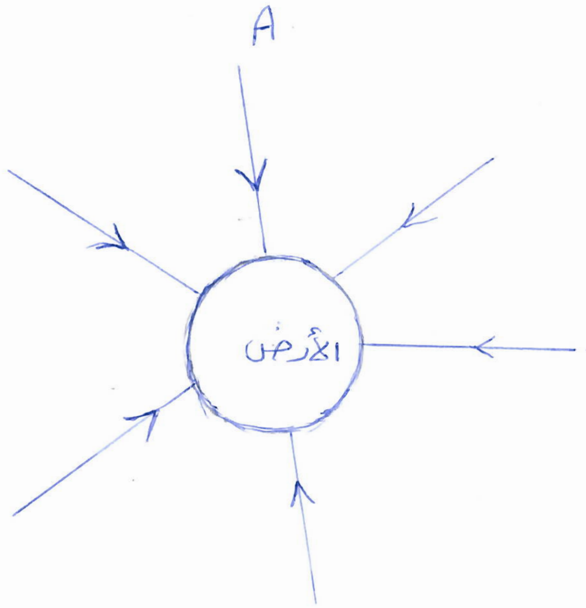
{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

المحاضرة الثالثة

الحقل الكهربائي : The Electric Field

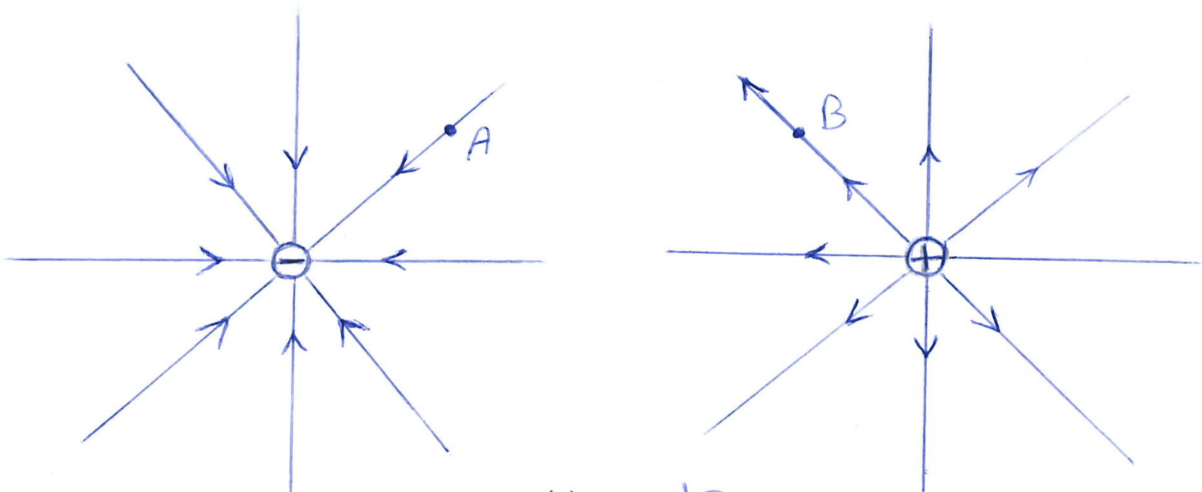
• تناقش عادة القوى المحركة الكهربائية بدلالة مفهوم نسميه الحقل الكهربائي. ويؤدي هذا المفهوم دوراً في الكهرباء مثلما يؤدي مفهوم حقل الجاذبية دوره في الميكانيك. فقد رأينا في بحوث الميكانيك أنه إذا ترك جسم بالقرب من الأرض فإنه يسقط باتجاه مركز الأرض، تحت تأثير قوة تدعى قوة الجاذبية. وعندما نبتعد عن الأرض، متجهين نحو الفضاء، فإن جاذبية الأرض للأشياء تصبح ضعيفة جداً. وعندئذٍ نقول إننا خرجنا من مجال الجاذبية الأرضية حين نبتعد مسافات كبيرة عنها أي أن مجال الجاذبية موجود في منطقة ما عندما تؤثر قوى جذب على جسم موجود في تلك المنطقة. ويُمثل حقل الجاذبية عادة بمجموعة من الأسهم المتجهة نحو مركز الأرض. كما في الشكل (2-9)



الشكل (2-9)

• تُعرف اتجاه الحقل الكهربائي، بطريقة مماثلة لحقل الجاذبية الأرضية، بأنه اتجاه القوة الكهربائية التي تؤثر على شحنة اختبار نقطية Test charge موجبة صغيرة. شحنة الاختبار هذه شحنة خيالية، لأننا نفترض صغيرة بحيث لا تحدث أي تأثير (اضطراب) على الشحنات المجاورة لها.

• لنفرض الآن أن شحنة اختبار نقطية موجبة قد وضعت في النقطة A كما في الشكل (2 - 10). ستنجذب هذه الشحنة إلى الشحنة السالبة على طول الخط الشعاعي الموضح ونعرف الحقل الكهربائي عند A على أنه اتجاه القوة المؤثرة على شحنة اختبار موجبة. وكما نرى، فإن المجال الكهربائي بالقرب من شحنة سالبة يتجه للداخل نحو هذه الشحنة. بينما يتجه الحقل الكهربائي بالقرب من شحنة موجبة، نحو الخارج بحيث تبدو خطوط الحقل الكهربائي مبتعدة عن الشحنة. كما يوضح ذلك الشكل (2-10) (b).



الشكل (2 - 10)

-a- -b-

تسمى الخطوط المرسومة في هذا الشكل لتمثيل القوة المؤثرة على شحنة الاختبار بخطوط القوة الكهربائية وبالتالي يمكننا تعميم القول: تنبع خطوط القوة وتخرج من الشحنات الموجبة بينما تتجه نحو الشحنات السالبة وتنتهي عندها. وهكذا يلعب الوسط المحيط بالشحنة دور الوسيط في نقل القوى أي نكون قد رفضنا التأثير عن بعد للقوى إلى التأثير عن قرب عن طريق إدخال مفهوم الحقل، وبناءً على ما تقدم سميت نظرية التأثير عن قرب أو نظرية التأثير بالتماس بنظرية الحقول.

• شدة الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية:

The Electric Fieled due to a point charge

• إن مفهوم الحقل الكهربائي قد طُوِّر من قبل العالم ميشيل فاراداي. وفي هذا السياق، الحقل الكهربائي هو المنطقة من الفضاء المحيطة بجسم مشحون. ويتم التحقق من وجود حقل كهربائي بوضع شحنة نقطية في الفضاء ويشار للحقل بوجود القوة الكهربائية.

• تعرف شدة الحقل الكهربائي بأنه القوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة على شحنة اختبار صغيرة، مقسومة على قيمة هذه الشحنة q_0. فإذا استخدمنا الرمز $\vec{E}$ للدلالة على شدة الحقل الكهربائي فإن التعريف السابق يكتب رياضياً على الشكل:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}} \qquad (3-2)$$

ونجد أن $\vec{E}$ مقدار متجه لأن $\vec{F}$ متجه وأن اتجاه $\vec{E}$ هو نفس اتجاه $\vec{F}$.

• واحدة شدة الحقل الكهربائي هي فولت/متر (V/m). ويجب أن نعلم أنه لقياس شدة الحقل الكهربائي عند نقطة معينة يجب استخدام شحنة صغيرة جداً حتى لا تسبب اضطراباً للشحنات الأخرى الموجودة.

• لنفرض أنه لدينا شحنة اختبار مقدارها q_0 تبعد بمقدار r عن شحنة نقطية q فإنه حسب قانون كولون تكون القوة المؤثرة على الشحنة q_0 مساوية

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{u}$$

$\vec{u}$: شعاع الواحدة على المستقيم الواصل بين الشحنتين.

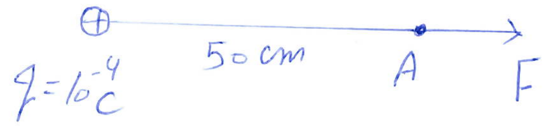
وبالتالي فإن شدة الحقل الكهربائي عند النقطة q_0 تكون:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u}} \qquad (4-2)$$

أي أن شدة الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية q في نقطة من الفراغ تبعد مسافة r عن الشحنة النقطية، تتعلق فقط بقيمة هذه الشحنة وبالبعد r عنها.

تمرين ١ : أوجد شدة الحقل الكهربائي المتولد على بعد 50 cm من شحنة نقطية موجبة مقدارها 10^{-4} C .

الحل: لدينا $q = 10^{-4}\,C$ ، $r = 0{,}5\,m$

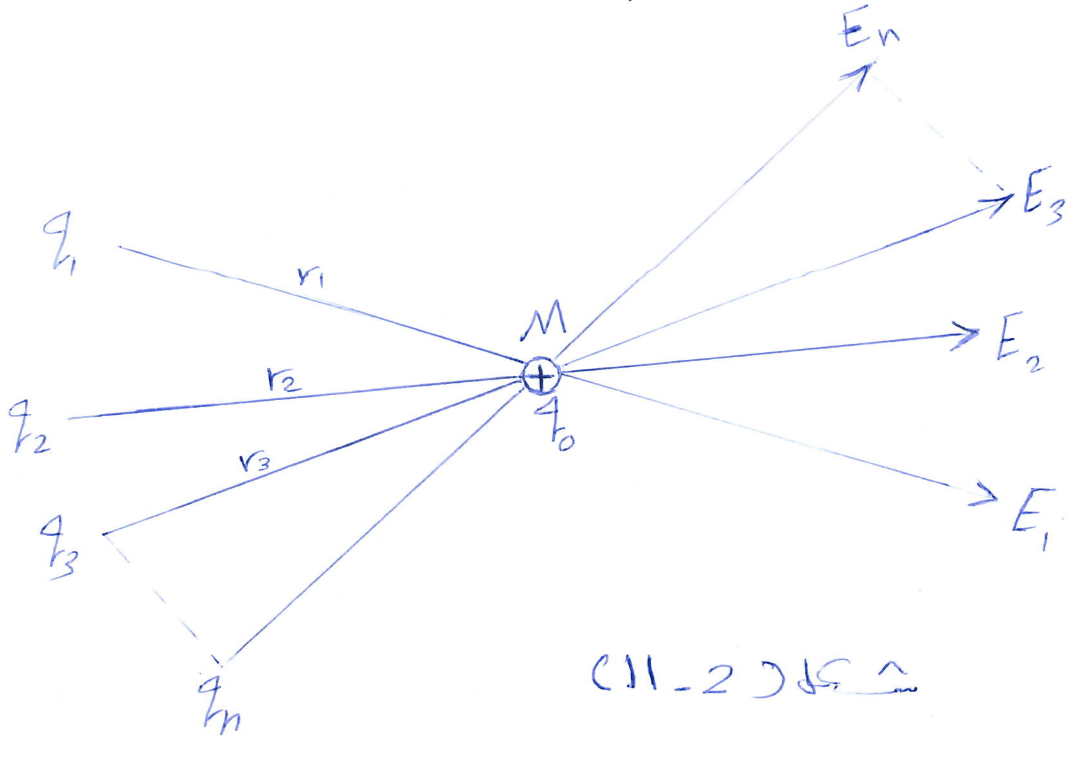


$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2} = (9\times10^{9})\,\frac{10^{-4}}{(0{,}5)^2} = 3.6\times10^{6}\ N/C$$

• الحقل الكهربائي المتولد عن مجموعة من الشحنات النقطية :

Electric field due to a finite number of point charges :

بفرض أنه لدينا مجموعة من الشحنات الكهربائية النقطية المعزولة :



شكل (2 _ 11)

$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ والتي تبعد بمسافات عن شحنة اختبار $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ موضوعة في النقطة M ، ولنحسب قيمة الحقل المتولد عن هذه الشحنات في النقطة M .

الشكل (2-11) . بتطبيق العلاقة (2-4) نحصل على شدة الحقل المطبق على q_0 من كل الشحنات على حدة ، ثم نجمع هذه الحقول جمعاً شعاعياً لنحصل على الحقل المحصل عند النقطة M أي:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \qquad (5-2)$$

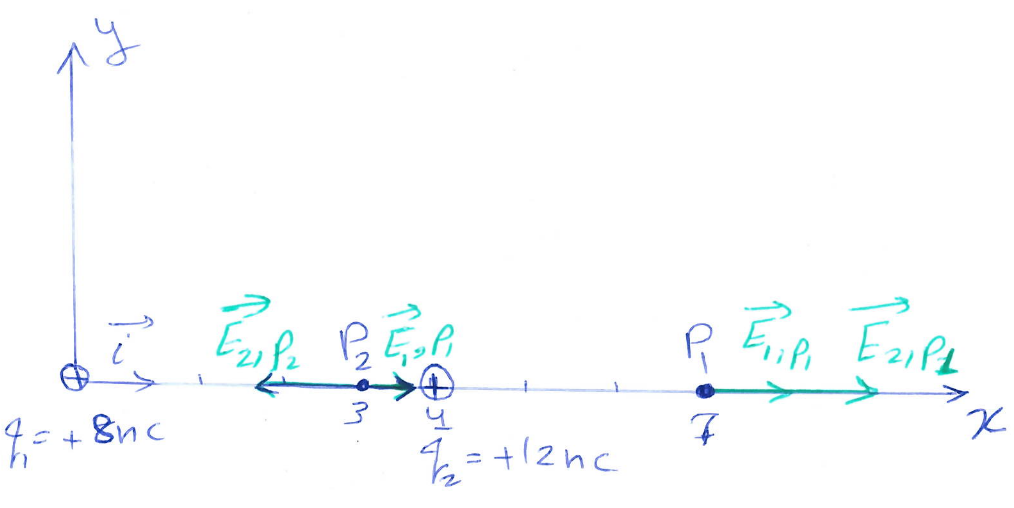
حيث: $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

تمرين 2 : لتكن لدينا الشحنة الموجبة الأولى $q_1 = +8\,nC$ عند مبدأ الاحداثيات والشحنة الموجبة الثانية $q_2 = +12\,nC$ متوضعة عند $x = 4\,m$.

أوجد المجال الكهربائي الكلي ((الصافي)) Net electric field .

في الحالتين التاليتين : a) عند النقطة P_1 على المحور OX أي عند $x = 7\,m$

b) عند النقطة P_2 على المحور OX أي عند $x = 3\,m$



الحل: اعتماداً على القانون

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\vec{i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\vec{i}$$ (a

$$\vec{E} = (9\times10^9)\cdot\frac{8\times10^{-9}}{(7)^2}\vec{i} + 9\times10^9\cdot\frac{12\times10^{-9}}{(3)^2}\vec{i}$$

$$= 1,47\,\frac{N}{C}\,\vec{i} + 12\,\frac{N}{C}\,\vec{i} = 13,5\,\frac{N}{C}\,\vec{i}$$

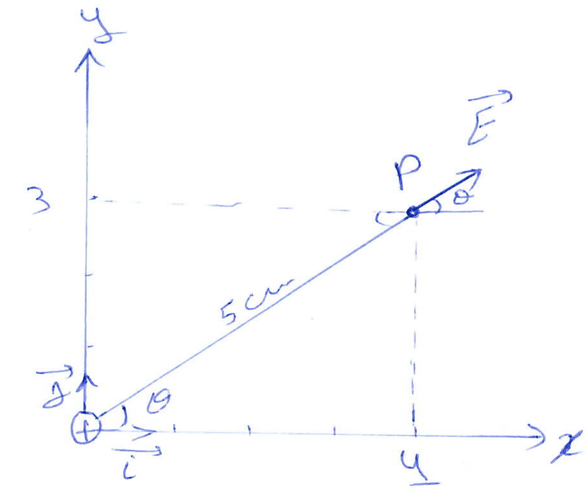
(b

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\vec{i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_2^2}(-\vec{i})$$

$$= 9\times10^9\times\frac{8\times10^{-9}}{(3)^2}\vec{i} - 9\times10^9\cdot\frac{12\times10^{-9}}{(1)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = 7,99\,\frac{N}{C}\vec{i} - 108\,\frac{N}{C}\vec{i} \simeq -100\,\frac{N}{C}\,\vec{i}$$

تمرين 3 : أوجد متجه المجال الكهربائي المتولد عن الشحنة $q = 24\mu C$ الموضوعة في مبدأ الاحداثيات في النقطة $P(4,3)$ cm .



الحل:

$$\vec{E} = E\cos\theta\,\vec{i} + E\sin\theta\,\vec{j}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q|}{r^2}$$

$$= 9\times10^9\,\frac{24\times10^{-6}}{(5\times10^{-2})^2}$$

$$= 8,64\times10^7 = 86,4\times10^6\,\frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 86,4\times10^6\times\left(\frac{4}{5}\right)\vec{i} + 86,4\times10^6\times\left(\frac{3}{5}\right)\vec{j}$$

$$= 69,12\times10^6\,\vec{i} + 51,84\times10^6\,\vec{j}$$

تمرين 4: عندما نضع شحنة نقطية $q = 5\,nC$ عند نقطة معينة، تخضع هذه الشحنة لقوة كهربائية مقدارها $2 \times 10^{-4}\,N$ أوجد شدة الحقل الكهربائي عند هذه النقطة.

الحل:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \left(\frac{2\times10^{-4}}{5\times10^{-9}}\right)\vec{i} = \frac{2}{5}\times10^{5}\,\frac{N}{C}\,\vec{i}$$

$$= 4\times10^{4}\,\frac{N}{C}\,\vec{i}$$

الحقل الكهربائي في حالة التوزع المستمر للشحنة الكهربائية

The Electric Field of a continuous charge distribution

• درسنا فيما سبق الحقل الكهربائي المتولد عن توزع منفصل للشحنة الكهربائية، سوف ندرس كيفية حساب الحقل الكهربائي الناتج عن توزع مستمر للشحنة الكهربائية. ونعلم أن هذا التوزع يمكن أن يكون بإحدى الحالات الثلاث الآتية:

1- حالة التوزع الخطي على سلك أو على منحني للشحنة بكثافة خطية λ ((شحنة واحدة الطول من المنحني)) والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \qquad ((1-3))$$

2- حالة التوزع السطحي: أي توزع الشحنة على سطح معين والذي يقود إلى تعريف كثافة الشحنة σ والتي تعطى بالعلاقة:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad ((2-3))$$

3 - حالة التوزيع الحجمي: أي توزيع الشحنة داخل حجم معين والذي يعود إلى تعريف الكثافة الحجمية للشحنة ρ والتي تعطى بالعلاقة التالية:

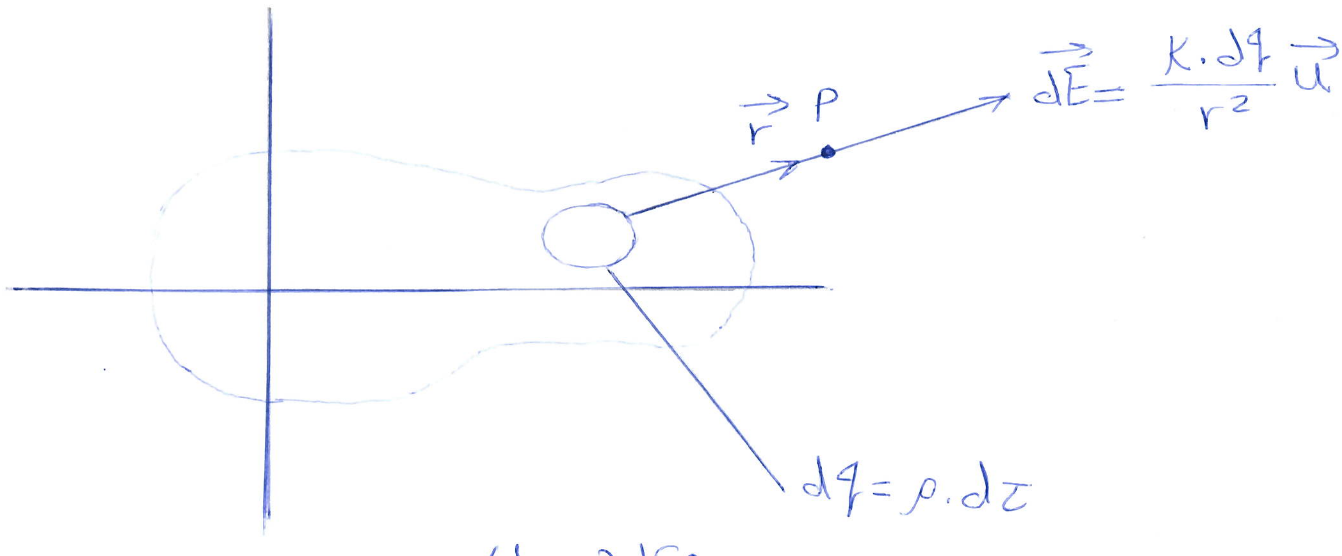
$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \qquad ((3-3))$$

• حساب الحقل الكهربائي $\vec{E}$ انطلاقاً من قانون كولون:

calculation of $\vec{E}$ From coulomb's Law:

• الشكل (3-1) يبين عنصراً من الشحنة $dq = \rho . d\tau$ والتي تكون صغيرة لدرجة أنه يمكن اعتبارها شحنة نقطية. الحقل الكهربائي $\vec{dE}$ في نقطة من الحقل P الناتج عن هذه الشحنة الصغيرة يعطى بقانون كولون كمايلي:

$$\vec{dE} = K \frac{dq}{r^2} . \vec{u} \qquad ((4-3))$$



الشكل (3-1)

شحنة عنصرية dq تولد حقلاً كهربائياً $\vec{dE}$ في النقطة P، الحقل الكلي في النقطة P الناتج عن الشحنة الكلية يحسب بالتكامل على كامل الحجم

حيث $\vec{u}$ شعاع الواحدة على المستقيم الذي يصل الشحنة العنصرية بالنقطة P.

الحقل الكلي في النقطة P نحصل بإجراء تكامل العلاقة السابقة (4-3) على التوزيع الكلي للشحنة. فنحصل على:

$$\vec{E} = \int_{\tau} \frac{K\,dq}{r^2}\,\vec{u} \qquad ((5-3))$$

حيث $dq = \rho\,d\tau$

وإذا كان التوزيع سطحياً نستخدم العلاقة $dq = \sigma\,dS$ وفي الحالة الخطية $dq = \lambda . dl$. ومن ثم نجري التكامل على كامل السطح أو المنحني.

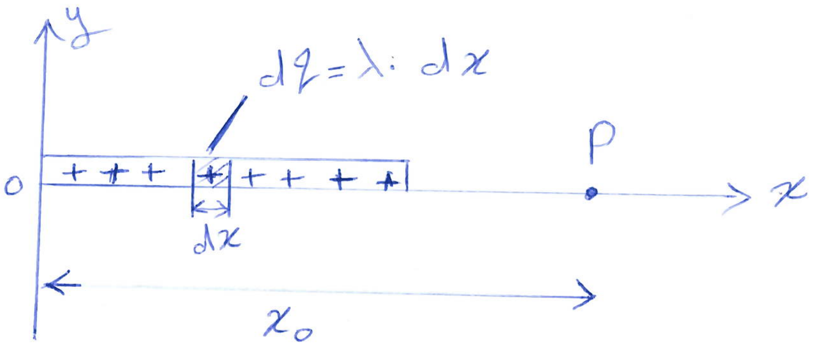
تطبيقات على حساب الحقل الكهربائي:

Applications on the electric field

1 - الحقل على المحور OX الناتج عن قضيب محدود ومشحون:

$\vec{E}$ on The AXIS of a finite Line charge:

- لتكن لدينا الشحنة Q الموزعة بشكل منتظم على القطعة المستقيمة المتوضعة على المحور OX من النقطة $X=0$ إلى $X=L$ كما هو موضح بالشكل (2-3).



الشكل (2-3): الشكل الهندسي للقطعة المستقيمة ذات الطول L والتي تحمل الشحنة Q الموزعة عليها بشكل منتظم

• الكثافة الخطية للشحنة تعطى بالعلاقة $\lambda = \frac{Q}{L}$ ، وسنحاول إيجاد الحقل الكهربائي المتكون عن هذه القطعة المشحونة في نقطة تقع على المحور X حيث $x = x_0$ ، $x_0 > L$. نأخذ كما هو مبين على الشكل السابق عنصراً صغيراً dx من القطعة المشحونة المتكونة يقع على مسافة x من المبدأ.
الحقل في النقطة P التي تبعد مسافة $r = x_0 - x$ عن الشحنة العنصرية.

• الحقل في تلك النقطة الناتج عن الشحنة العنصرية يعطى بقانون كولون.
ويكون موجهاً على طول المحور x ويعطى بالعلاقة التالية:

$$dE_x = \frac{K\,dq}{(x_0 - x)^2} = \frac{K\lambda\,dx}{(x_0 - x)^2}$$

وبالتالي نجد الحقل الكلي الناتج عن القطعة ذات الطول L من $x=0$ إلى $x=L$ بالمكاملة:

$$E_x = K\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = K\lambda \left[\frac{1}{x_0 - x}\right]_0^L$$

$$= K\lambda \left\{\frac{1}{x_0 - L} - \frac{1}{x_0}\right\} = K\lambda \left\{\frac{L}{x_0(x_0 - L)}\right\}$$

باستخدام العلاقة $\lambda = \frac{Q}{L}$ نحصل على:

$$E_x = \frac{KQ}{x_0(x_0 - L)} \qquad (6-3)$$

• نلاحظ من العلاقة السابقة (3-6) أنه إذا كانت x_0 أكبر بكثير من L فإن الحقل الكهربائي في النقطة x_0 يصبح مساوياً تقريباً لـ :

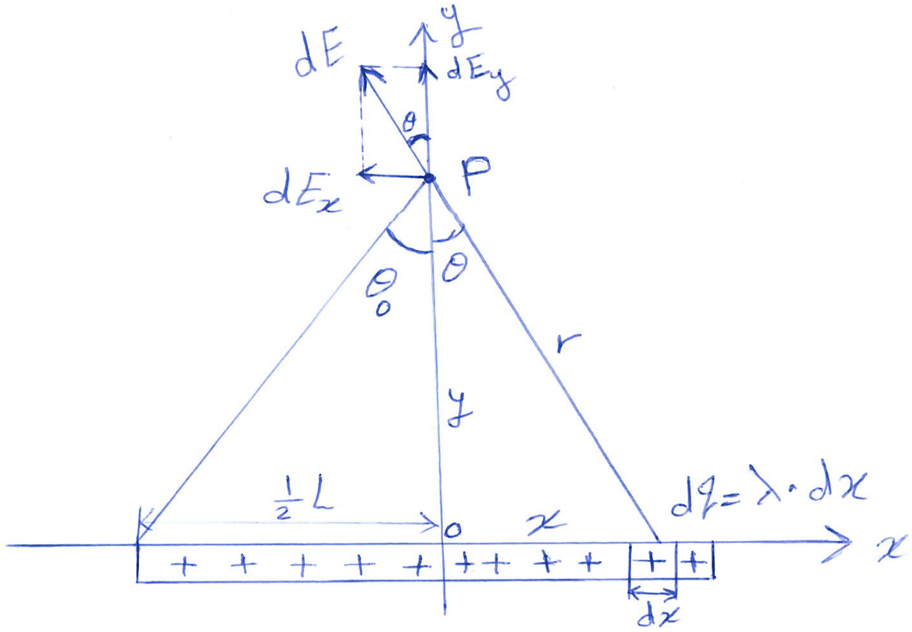
$$E_x = \frac{KQ}{x_0^2}$$

. هذا يعني أنه على مسافة كبيرة من القطعة المستقيمة المشحونة L ، يمكن النظر إلى هذه القطعة وكأنها شحنة نقطية .

• الحقل في نقطة تقع على محور قطعة مستقيمة محدودة ومشحونة :

$\vec{E}$ on the perpendicular Axis of a finit Line charge:

أولاً سنتطرق للحالة البسيطة التي نحسب فيها الحقل في نقطة P تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة المحدودة والمشحونة كما هو موضح بالشكل (3-3) .



الشكل (3-3)

الشكل الهندسي لحساب الحقل الكهربائي في نقطة تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة المحدودة المشحونة بشكل متجانس

• نختار إحداثيات الجملة بحيث تكون الشحنة منطبقة على المحور ox والمبدأ يكون في منتصف القطعة ، والنقطة التي نحسب عندها الحقل تقع على المحور oy .

• عنصر الشحنة الخطي $dq = \lambda . dx$ والذي يولد الحقل $\vec{E}$ في النقطة P مبين في الشكل (3-3) .

• إن الحقل يملك مركبتين مركبة موازية للمستقيم الحامل للشحنة ومركبة عمودية عليه . يمكن أن نلاحظ من خلال التناظر الموجود في الشكل السابق بأنه إذا أخذنا بعين الاعتبار كل العناصر الجزئية للشحنة على القطعة المكونة ، فإن محصلة المركبة الموازية تكون معدومة (لأن المركبة الناتجة عن شحنة عنصرية يمينية مثلاً تعدل المركبة الناتجة عن شحنة عنصرية يسارية) ، وبالتالي فإن الحقل الناتج $\vec{E}$ يكون وفق المحور oy

• إن طويلة الحقل الناتج عن الشحنة العنصرية $dq = \lambda . dx$ تعطى بالعلاقة التالية :

$$|d\vec{E}| = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{k\,\lambda\,dx}{r^2}$$

المركبة وفق المحور y تكون :

$$dE_y = \frac{k\,\lambda\,dx}{r^2}\cos\theta = \frac{k\,\lambda . y . dx}{r^3} \qquad (7-3)$$

حيث :

$\cos\theta = \frac{y}{r}$ ، $r = \sqrt{x^2+y^2}$ نحصل على الحقل الكلي E_y

بإجراء التكامل من $x = -\frac{1}{2}L$ إلى $x = +\frac{1}{2}L$

بسبب التناظر في المسألة فإن مساهمة كل نصف من نصفي المستقيم المشحون تكون مساوية للأخرى، وبالتالي يمكن إجراء التكامل على نصف القطعة المستقيمة أي من $x=0$ إلى $x=\frac{1}{2}L$ وضرب النتيجة بـ 2 فنجد:

$$E_y=\int_{x=-\frac{1}{2}L}^{x=+\frac{1}{2}L} dE_y = 2\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L} dE_y = 2k\lambda y\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L}\frac{dx}{r^3} \qquad (8-3)$$

• يمكن إيجاد التكامل السابق من خلال جداول التكاملات النظامية:

$$\int\frac{dx}{r^3}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{1}{y^2}\sin\theta$$

• نلاحظ من خلال الشكل السابق أنه من أجل $x=0$ فإن $\theta=0$ وبالتالي فإن $\sin\theta=0$ هذا من أجل الحد الأدنى للتكامل، أما من أجل الحد الأعلى للتكامل $x=\frac{L}{2}$ فإن $\theta=\theta_0$ وبالتالي يكون التكامل السابق معطى بالعلاقة التالية:

$$E_y=\frac{2k\lambda y}{y^2}\cdot\sin\theta_0$$

أو

$$E_y=\frac{2k\lambda}{y}\cdot\sin\theta_0=\frac{2k\lambda}{y}\cdot\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}} \qquad (9-3)$$

وذلك بحساب θ_0 من الشكل السابق بدلالة L و y.

بنفس الطريقة السابقة نجد أنه عندما تكون y أكبر بكثير من L فإن علاقة الحقل الكهربائي الناتج السابقة تصبح كما يلي:

$$E_y\simeq k\frac{Q}{y^2}$$

حالة خاصة: عندما يكون المستقيم الحامل للشحنة لانهائياً.

• نحصل على هذه الحالة عندما نكون قريبين جداً من القطعة المستقيمة (أي عندما يكون $(y<<L)$ أو عندما تكون القطعة المستقيمة المشحونة طويلة جداً، في هذه الحالة تكون الزاوية θ المبينة بالشكل (3-3) مساوية تقريباً 90° وبالتالي $\sin\theta = 1$ هذا يعني أن علاقة الحقل في هذه الحالة الخاصة تصبح:

$$E_y = \frac{2K\lambda}{y}$$

الحقل $\vec{E}$ يكون متجهاً بالاتجاه المعاكس للقطعة المستقيمة (وذلك من أجل شحنة مستقيمة موجبة) وشدته تتناقص كلما ابتعدنا عن القطعة وفق $\frac{1}{y}$.

تمرين: مستقيم مكون من كثافة خطية $\lambda = 4,5\ nC/m$ محمول على المحور X وممتد من $x = -5\ cm$ إلى $x = 5\ cm$. احسب الحقل الكهربائي في نقطة ما من المحور y وذلك باستخدام العلاقة (3-9). في النقاط: a) $y = 1cm$ b) $y = 4cm$ c) $y = 40cm$

d) احسب الحقل الكهربائي في نقطة على المحور y حيث $y = 1cm$ وذلك بفرض أن المستقيم المشحون لانهائي بالنسبة لهذه النقطة.

e) أوجد الشحنة الكلية ومن ثم احسب الحقل الكهربائي الناتج في النقطة $y = 40\ cm$، معتبراً أن المستقيم يعادل شحنة نقطية.

الحل:

a) حساب E_y في النقطة $y = 1\ cm$ من أجل كثافة خطية $\lambda = 4,5\ nC/m$

$$\frac{L}{2} = 5\times10^{-2}\ m$$

$$E_y = \frac{2K\lambda}{y}\cdot\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}} = \frac{2(9\times10^{9})(4,5\times10^{-9})}{0,01}\times\frac{5\times10^{-2}}{10^{-2}\sqrt{(5)^2+(1)^2}}$$

$$= \frac{80,9}{0,01}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = 7,93\times10^{3}\ N/C = 7,93\ KV/m$$

b) نعيد الحساب من أجل $y = 4\ cm = 0,04\ m$ مستخدمين النتيجة $2\lambda K = 80,9$

$$E_y = \frac{80,9}{0,04}\cdot\frac{5\times10^{-2}}{10^{-2}\sqrt{(5)^2+(4)^2}} = 1,58\times10^{3}\ N/C = 1,58\ KV/m$$

c) من أجل $y = 40\ cm$.

$$E_y = \frac{80,9}{0,4}\cdot\frac{5\times10^{-2}}{10^{-2}\sqrt{(5)^2+(40)^2}} = 25,1\ N/C$$

d) حساب الحقل من أجل $y = 1\ cm = 0,01\ m$

مستوى: الناتج عن سلك لانهائي

$$E_y \simeq \frac{2K\lambda}{y} = \frac{80,9}{0,01} = 8109\ N/C$$

e) حساب الشحنة الكلية من أجل λK و $L = 0,1\ m$ وباستخدام

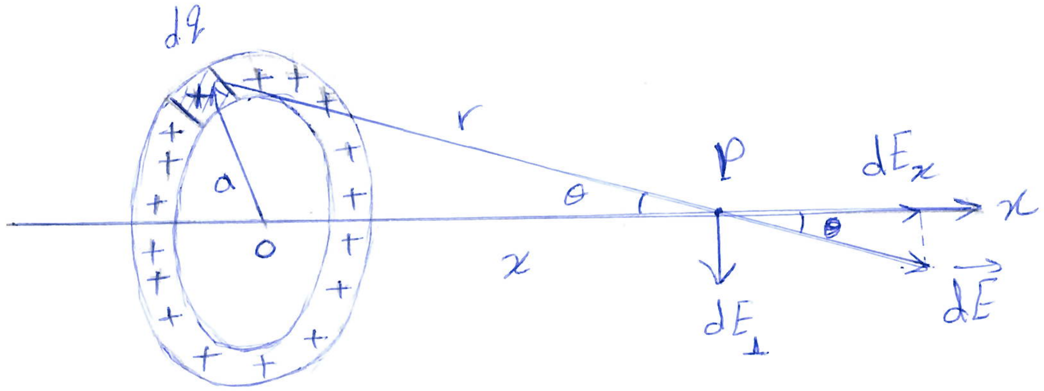
في حساب الحقل المتكون عن شحنة نقطية في النقطة $y = 0,4\ m$:

$$E_y \simeq \frac{2K\lambda}{y} = \frac{KQ}{y^2} = \frac{(8,99\times10^{9})(0,45\times10^{-9})}{(0,40)^2} = 25,3\ \frac{N}{C}$$

• الحقل الكهربائي المتولد عن حلقة دائرية مشحونة في نقطة من محورها:

The Electric field of a Uniform ring of charge:

• يبين الشكل (4-3) حلقة دائرية نصف قطرها a مشحونة بشكل منتظم وبشحنة كلية Q. الحقل الكهربائي $\vec{dE}$ في النقطة P من محور الحلقة والناتج عن الشحنة العنصرية dq مبين بالشكل. فيملك الحقل مركبتين مركبة dE_x وفق المحور X للحلقة ومركبة عمودية على ذلك المحور $E_\perp$. وبسبب التناظر في الحلقة السابقة فإن الحقل الكلي الناتج عن كامل الحلقة متجه باتجاه محور الحلقة لأن مجموع المركبات العمودية للحقل معدوم.



الشكل (4-3)
حلقة دائرية نصف قطرها a مشحونة بشحنة كهربائية Q

• المركبة وفق المحور X الناتجة عن الشحنة العنصرية dq تعطى بالعلاقة التالية:

$$dE_x = \frac{K dq}{r^2} \cos\theta = \frac{K \cdot dq}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{K \cdot dq \cdot x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

حيث $r^2 = x^2 + a^2$ و $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

الحقل الكلي الناتج عن كامل الحلقة يعطى بالعلاقة التالية:

$$E_x = \int \frac{K x \, dq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

نلاحظ أن x لا تتغير وبالتالي نجري التكامل على كامل الشحنة الموزعة على الحلقة فنجد

$$E_x = \frac{K x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \int dq \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{K x Q}{(x^2+a^2)^{3/2}}} \qquad (10-3)$$

تمرين: أوجد الحقل على محور الحلقة المكونة في النقطتين: a) $x=0$
b) x تكون كبيرة جداً
بالمقارنة مع نصف قطر الحلقة

الحل: a) $E_x = 0$ من أجل $x = 0$

b) $E_x \simeq \frac{KQ}{x^2}$ من أجل $(x \gg a)$