كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

عامل التكامل: هو تابع $M(w)$ يحول المعادلة غير التامة إلى معادلة تامة بحيث ضرب بـ $M(w)$.

- قانون عامل التكامل:

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N w_x - M w_y} dw$$

- نميز بعض الحالات الخاصة:

(1) $w = x$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

(2) $w = y$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy$$

(3) $w = x + y$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} d(x+y)$$

(4) $w = x - y$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N + M} d(x-y)$$

$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} d(x.y)$ $\omega = x.y$ (5)

مثال: حل المعادلة: $(x^2+y^2-x)dx + xy\,dy = 0$ (1)

$M = x^2+y^2-x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$N = x.y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ المعادلة غير تامة.

نبحث عن عامل تكميل لها:

بعد التوقع أن عامل التكميل هنا تابع لـ x نطبق القانون التالي:

$\frac{dM}{M} = \frac{y}{xy} dx$

$\ln M = \ln x \rightarrow \boxed{M = x}$

نضرب (1) بـ x:

$(x^3 + x^2y + x^2)dx + x^2y\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$

تامة

$(x^3+x^2)dx + xy^2\,dx + x^2y\,dy$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(x^3+x^2)dx + xy^2\,dx + x^2y\,dy$ → $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

$(x^3+x^2)dx + d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) = 0$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} = C$$

مثال: حل المعادلة:

$2xy\,dx + (3x^2+4y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x$ } ⇒ غير تامة

عامل التكميل:

$\frac{dM}{M} = \frac{-4x}{-2xy}dy \Rightarrow \frac{dM}{M} = \frac{2}{y}dy$

$\ln M = \ln y^2 \Rightarrow \boxed{M = y^2}$

نضرب بعامل التكميل بـ y:

$2xy^3dx + (3x^2y^2+4y^3)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$ $\quad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$

⇐ تامة

$$4y^3\,dy + 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$$

تكامل بالنسبة لـ x أو y

$$4y^3\,dy + dx^2y^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y^4 + x^2y^3 = c}$$

وهو التكامل العام

المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى:

الشكل العام لها:

$$y' + p(x)\,y = q(x) \quad \ldots (2)$$

عندما $q(x) = 0$ تسمى المعادلة

$$y' + p(x)\,y = 0 \quad \text{خطية متجانسة} \quad \ldots (3)$$

حل (3) بسيط

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0 \qquad (\times dx)$$

$$p(x)\,y\,dx + dy = 0 \qquad (\div y)$$

$$p(x)\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0$$

$$\int p(x)\,dx + \ln y = c_1$$

$$\Rightarrow \ln y = c_1 - \int p(x)\,dx$$

وهو الحل العام للمعادلة $\boxed{y = c\,e^{-\int p(x)\,dx}}$

مثال: حل المعادلة: $xy' + \frac{y}{x} = 0$

الحل:

$$y' + \frac{1}{x^2}\,y = 0$$

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow y = c\,e^{-\int \frac{1}{x^2}\,dx}$$

$$\boxed{y = c\,e^{\frac{1}{x}}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة