كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : الثانية /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: أوجد صيغة تنتج عن خلالها جميع الحلول الصّحيحة للمعادلة الديوفانتية $54x + 21y = 906$ ثمّ جدّد الحلول الموجبة إن وُجدت؟

الحل:

$a = 54 \quad b = 21 \quad c = 906$

• نوجد $d = gcd(a,b)$ بطريقة اقليدس:

$54 = 2 \times 21 + 12$

$21 = 1 \times 12 + 9$

$12 = 1 \times 9 + \boxed{3}$

$9 = 3 \times 3 + 0 \Rightarrow d = gcd(a,b) = 3$

• نكتب d بدلالة a و b:

$d = 3 = 12 - 9 = 12 - (21 - 12) = -21 + 2 \times 12$

$\Rightarrow 3 = -21 + 2(54 - 2 \times 21)$

$3 = -5 \times 21 + 2 \times 54$

$\boxed{3 = 54(2) + 21(-5)} \quad (*)$

• نضرب طرفي $(*)$ بـ $\frac{c}{d} = \frac{906}{3} = 302$ فنجد أنّ

$906 = 54(604) + 21(-1510)$

بالتّالي حلّ المعادلة الديوفانتية

$(x_0, y_0) = (604, -1510)$

• إيجاد صيغة تُعطي جميع الحلول الصّحيحة:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t = 604 + 7t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t = -1510 - 18t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

• إيجاد الحلول الموجبة :

$x > 0$ ، $y > 0$

$604 + 7t > 0$ ، $-1510 - 18t > 0$

$7t > -604$ ، $-18t > 1510$

$t > -86.28$ ، $t < -83.88$

$\Rightarrow t \in]-86.28, -83.88[\cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow t \in \{-86, -85, -84\}$

نعوض قيم t في صيغة الحلول

من أجل $t = -84$

$$\begin{cases} x = 604 + 7(-84) = 16 \\ y = -1510 - 18(-84) = 2 \end{cases}$$

$t = -85 \Rightarrow \begin{cases} x = 604 + 7(-85) = 9 \\ y = -1510 - 18(-85) = 20 \end{cases}$

$t = -86 \Rightarrow \begin{cases} x = 604 + 7(-86) = 2 \\ y = -1510 - 18(-86) = 38 \end{cases}$

التمرين الثاني : أوجد صيغة نستنتج من خلالها جميع الحلول الصحيحة للمعادلة الديوفانتية $738x + 621y = 45$

ثم حدد الحلول الموجبة إن وجدت ؟

الحل :

$a = 738$ ، $b = 621$ ، $c = 45$

• نوجد $d = gcd(a, b)$ بطريقة اقليدس :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$738 = 1 \times 621 + 117$$

$$621 = 5 \times 117 + 36$$

$$117 = 3 \times 36 + \boxed{9}$$

$$36 = 4 \times 9 + 0 \Rightarrow \gcd(a,b) = 9$$

• نكتب d بدلالة العددين a و b :

$$d = 9 = 117 - 3 \times 36 = 117 - 3(621 - 5 \times 117)$$

$$\Rightarrow d = 9 = -3 \times 621 + 16 \times 117$$

$$d = 9 = -3 \times 621 + 16(738 - 621)$$

$$d = 9 = -19 \times 621 + 16 \times 738$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 9 = 738\,(16) + 621\,(-19)} \quad (*)$$

• نضرب طرفي المعادلة (*) بـ $5 = \frac{45}{9} = \frac{c}{d}$

$$\Rightarrow 45 = 738\,(80) + 621\,(-95)$$

بالتّالي فإنّ حل المعادلة الديوفانتية هو :

$$(x_0, y_0) = (80, -95)$$

• صيغة جميع حلول المعادلة :

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = 80 + 69t \\ y = -95 - 82t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

• تعيين الحلول الموجبة للمعادلة :

$x > 0$	$y > 0$
$80 + 69t > 0$	$-95 - 82t > 0$
$69t > -80$	$-82t > 95$
$t > -1.159$	$t < -1.158$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ عدم وجود عدد صحيح ضمن هذا المجال $]-1.159, -1.158[$

بالتالي لا يوجد حلول صحيحة للمعادلة السّابقة.

التمرين الثالث أوجد أعداد صحيحة x و y و z التي تحقّق العلاقة:

$$d = gcd(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z.$$

الحل:

نوجد: $d_1 = gcd(288, 512)$

$$512 = 1 \times 288 + 224$$
$$288 = 1 \times 224 + 64$$
$$224 = 3 \times 64 + \boxed{32}$$
$$64 = 2 \times 32 + 0$$
$$\Rightarrow d_1 = gcd(288, 513) = 32$$

نوجد: $d = gcd(198, 32)$

$$198 = 6 \times 32 + 6$$
$$32 = 5 \times 6 + \boxed{2}$$
$$6 = 3 \times 2 + 0$$
$$\Rightarrow d = gcd(198, 32) = 2$$

لنكتب d كتركيب خطي للعددين 198 و 32:

$$d = 2 = 32 - 5 \times 6 = 32 - 5(198 - 6 \times 32)$$
$$\Rightarrow d = 2 = 31 \times 32 - 5 \times 198$$
$$\boxed{d = 2 = -5 \times 198 + 31 d_1} \quad (1)$$

لنكتب d_1 كتركيب خطي للعددين 288 و 512:

$$d_1 = 32 = 224 - 3 \times 64$$

$\Rightarrow d_1 = 224 - 3(288 - 224)$

$= 4 \times 224 - 3 \times 288$

$= 4(512 - 288) - 3 \times 288$

$\Rightarrow \boxed{d_1 = 4 \times 512 - 7 \times 288}$ ②

نعوّض ② في ① :

$d = -5 \times 198 - 217 \times 288 + 124 \times 512$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -217 \\ z = 124 \end{cases}$

انتهت الحاجزة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة