كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : الاولى /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تمرين 1: أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي صحّة العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

الحل:

- نثبت صحّة العلاقة من أجل $n=1$:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} \Big\} \Rightarrow P_1 = P_2$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

بالتّالي العلاقة صحيحة من أجل $n=1$

- نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

- نثبت صحّة العلاقة من أجل $n=k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} \overset{?}{=} 1 - \frac{1}{k+2}$$

لدينا $P_1 = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$

$$1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] =$$

$$1 - \left[\frac{k+2-1}{(k+1)(k+2)}\right] = 1 - \frac{1}{k+2} = P_2$$

- العلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$

$\Rightarrow$ العلاقة صحيحة مهما كان n حيث $n \in \mathbb{N}^*$

تمرين (2): أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي صحّة العلاقة:

$$7 \mid (2^{3n} - 1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

الحل: لنأخذ $f(n)=2^{3n}-1$

• نثبت صحّة العلاقة من أجل $n=0$ ؛ لدينا $7 \mid 0 \Leftarrow f(0)=0$

بالتالي العلاقة صحيحة من أجل $n=0$

• نفرض صحّة العلاقة من أجل $n=k$ ؛ $7 \mid f(k)$

$\Rightarrow 7 \mid (2^{3k}-1)$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=k+1$ ؛ أي يجب أن نثبت أنّ:

$7 \mid f(k+1)$ $\quad 7 \mid 2^{3(k+1)}-1$??

لدينا $f(k+1)=2^{3(k+1)}-1=2^{3k+3}-1=8\times 2^{3k}-1=$

$8(2^{3k}-1+1)-1=8f(k)-7$

لدينا $7 \mid 7$ و $7 \mid f(k) \Leftarrow 7 \mid 8f(k)$

$\Rightarrow 7 \mid (8f(k)+7) \Rightarrow 7 \mid f(k+1)$

بالتّالي العلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$ ممّا سبق نجد أنّ العلاقة المعطاة في نص السؤال صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$.

تمرين (3): أثبت أنّ $15 \mid (2^{4n}-1)$ وذلك $\forall n \in \mathbb{N}$ ؟

الحل: لنأخذ $f(n)=2^{4n}-1$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$ ؛ $f(0)=0$ و $15 \mid 0$

$\Leftarrow$ العلاقة صحيحة من أجل $n=0$

• نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$ ؛ $15 \mid f(k)$

$15 \mid (2^{4k}-1)$

• نثبت صحّة العلاقة من أجل $n=k+1$ ؛ أي يجب أن نثبت أنّ:

$15 \mid f(k+1)$ $\quad 15 \mid (2^{4(k+1)}-1)$??

لدينا $f(k+1)=2^{4(k+1)}-1=2^{4k+4}-1=16\times 2^{4k}-1=$

$16(2^{4k}-1+1)-1=16f(k)+15$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إنّ $15 \mid 15$ و $15 \mid f(k) \Rightarrow 15 \mid 16 f(k)$

$15 \mid (16 f(k) + 15)$

$15 \mid f(k+1)$

بالتّالي العلاقة صحيحة من أجل $n = k+1$ ممّا سبق نجد أنّ العلاقة المعطاة في نص السؤال صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$

تمرين (4): ليكن $a = 1000$ و $b = 72$

1- أوجد $\gcd(a,b)$ ؟

2- اكتب $\gcd(a,b)$ بدلالة العددين a و b ؟

الحل:

1) $1000 = 13 \times 72 + 64$

$72 = 1 \times 64 + \boxed{8}$

$64 = 8 \times 8 + 0$

$\Rightarrow \gcd(a,b) = 8 = d$

2) $d = 8 = 72 - 64 = 72 - (1000 - 13 \times 72)$

$= -1000 + 14 \times 72$

$\boxed{d = -1a + 14b}$

تمرين (5): $a = 543$ و $b = 5$

1- أوجد $\gcd(a,b)$ بطريقة اقليدس ؟

2- اكتب $\gcd(a,b)$ بدلالة العددين a و b [كتركيب خطّي للعددين a و b ؟]

الحل:

1) $543 = 108 \times 5 + 3$

$5 = 1 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0 \Rightarrow d = \gcd(a,b) = 1$

$d = 1 = 3 - 2$ (2

$= 3 - (5 - 3)$

$= 2 \times 3 - 5$

$= 2(543 - 108 \times 5) - 5$

$= 2 \times 543 - 216 \times 5 - 5$

$= 2 \times 543 - 217 \times 5$

$\boxed{d = 1 = 2a - 217b}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z