كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي ١

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

القسم: الرياضيات — الدكتورة: عائشة صابحة

السنة: الرابعة — المحاضرة: 2 - نظري

المادة: تحليل تابعي 1 — التاريخ: / /

A to Z Library for university services

مثال (5): فضاء الدوال $c[a,b]$:

لتكن $c[a,b]$ مجموعة الدوال الحقيقية المعرّفة والمستمرة على المجال الحقيقي $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ والتابعة لتحول (متغير) حقيقي واحد أي:

$x = x(t)$ الدالة ; $\forall t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ المتغير

وبالتالي يمكن كتابة المجموعة $c[a,b]$ بالشكل:

$c[a,b] = \{ x \;;\; x : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;;\; x = x(t) \;;\; \forall t \in [a,b]$ & x دالة حقيقية معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ وهي تابعة لتحول حقيقي واحد فقط هو $t \}$

لنعرّف على المجموعة $c[a,b]$ الدالة d بالشكل التالي:

$$d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \;;\; \forall x = x(t) \in c[a,b],\; y = y(t) \in c[a,b]$$

إنّ d مسافة على المجموعة $c[a,b]$ وَ $(c[a,b], d)$ فضاء متري واختصاراً $c[a,b]$ فضاء متري ندعوه فضاء الدوال الحقيقية المعرفة والمستمرة على المجال الحقيقي $[a,b]$. (نترك برهانه للعملي)

ملاحظة: يمكن تعريف مسافة أخرى $\tilde{d}$ على المجموعة $c[a,b]$ بالشكل التالي:

$$\tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt \;;\; \forall x = x(t) \;\&\; y = y(t) \in c[a,b]$$

إنّ $(c[a,b], \tilde{d})$ فضاءً مترياً و $\tilde{d}$ مسافة على $c[a,b]$

نترك برهانه للعملي

مثال (6): فضاء المتتاليات المحدودة ℓ^∞:

لتكن ℓ^∞ مجموعة جميع المتتاليات العقدية اللانهائية والمحدودة أي:

$$\ell^\infty = \{x \;;\; x = (\xi_n)_{n\geq 1} = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \;\&$$
$$\xi_n \in \mathbb{C} \;;\; n = 1, 2, \ldots \;\&\; \exists\, c_x \in \mathbb{R}^+ \;;\; |\xi_n| \leq c_x\}$$

ولنعرف على هذه المجموعة الدالة d بالشكل التالي:

$$d: \ell^\infty \times \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n - \eta_n| \;;\; \forall x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$$
$$y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots) = (\eta_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$$

إن d مسافة على ℓ^∞ و (ℓ^∞, d) واختصاراً ℓ^∞ هو فضاء متري ويدعى فضاء المتتاليات المحدودة (يترك للعملي)

مثال (7): فضاء المتتاليات S:

لتكن S مجموعة جميع المتتاليات المحدودة وغير المحدودة والتي حدودها أعداد عقدية أي:

$$S = \{x \;;\; x = (\xi_n)_{n\geq 1} = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \;;\; \xi_n \in \mathbb{C} \;;\; n = 1, 2, \ldots\}$$

ولنعرف على هذه المجموعة الدالة d بالشكل التالي:

$$d: S \times S \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|} \;;\; \forall x = (\xi_n)_{n\geq 1} \in S$$
$$y = (\eta_n)_{n\geq 1} \in S$$

إن d مسافة على المجموعة S و (S, d) أو S اختصاراً هو فضاء متري ويدعى فضاء المتتاليات المحدودة وغير المحدودة (يترك للعملي)

مثال (8): فضاء التوابع المحدودة $B(A)$:

لتكن $B(A)$ مجموعة جميع التوابع المعرفة والمحدودة على مجموعة مفروضة A أي:

$$B(A)=\{x\ ;\ x=x(t)\ \&\ \exists\, k\geq 0\ ;\ |x(t)|\leq k\ ;\ \forall t\in A\}$$

و x دالة معرّفة وتابعة لمتحوّل (متغيّر) واحد وهي محدودة على المجموعة A

ولنعرّف الدّالة d على $B(A)$ بالشكل التّالي:

$$d: B(A)\times B(A)\longrightarrow \mathbb{R}^+\cup\{0\}$$

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)| \qquad \forall\, x=x(t)\in B(A)$$
$$y=y(t)\in B(A)$$

إنّ d مسافة على $B(A)$ و $B(A)$ فضاء متري يُدعى فضاء الدّوال المحدودة (يُترك للعملي).

ملاحظة: عندما $A=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ عندئذٍ نرمز للفضاء $B(A)$ بـ $B(a,b)$.

مثال (٩): الفضاء ℓ^p:

لنأخذ المجموعة ℓ^p حيث $1\leq p\in\mathbb{R}$ وهي مجموعة جميع المتتاليات العدديّة

$$x=(\xi_n)_{n\geq 1}=(\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots)$$

والتي تحقّق:

$$|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots+|\xi_n|^p+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty$$

أي متقاربة مطلقاً فهي متقاربة.

أي يمكن كتابة المجموعة ℓ^p بالشكل التّالي:

$$\ell^p=\{x\ ;\ x=(\xi_n)_{n\geq 1}\ \&\ \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty\ ;\ p\geq 1\ \&\ p\in\mathbb{R}\}$$

ولنعرّف على هذه المجموعة الدالة d بالشكل التالي:

$$d: \ell^p\times\ell^p\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{0\}$$

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ ;\quad \forall\, x=(\xi_n)_{n\geq 1}\in\ell^p$$
$$y=(\eta_n)_{n\geq 1}\in\ell^p$$

حيث $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p<\infty$

إنّ (ℓ^p,d) واختصاراً ℓ^p هو فضاء متري يُدعى فضاء المتتاليات

العددية ... (يبرهن بالعملي)

ملاحظة هامة: عندما تكون المتتاليات العددية في الفضاء ℓ^p حقيقية عندئذٍ نميّز هذا الفضاء بدليل سفلي هو ($\mathbb{R}$) ونكتب:

$$\ell^p_{\mathbb{R}} = \{x \,;\, x = (\xi_n)_{n\geq 1} \;\&\; \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \,;\, 1 \leq p \leq \mathbb{R} \;\&\; \xi_n \in \mathbb{R} \,;\, n = 1, 2, \ldots\}$$

• أمّا عندما تكون المتتاليات في هذا الفضاء عقدية فنكتبه بالشكل التالي:

$$\ell^p_{\mathbb{C}} = \{x \,;\, x = (\xi_n)_{n\geq 1} \;\&\; \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \,;\, 1 \leq p \leq \mathbb{R} \;\&\; \xi_n \in \mathbb{C} \,;\, n = 1, 2, \ldots\}$$

تعريف: الأسيين المترافقين:

ليكن p عدداً ما حيث $1 \leq p \in \mathbb{R}$ ولنعرّف العدد q وفق العلاقة:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1} \quad (*)$$

ندعو العددين p و q المحققين للعلاقة (*) بالأسيين المترافقين أو الأسيين المرافقين.

(فضاء المتتاليات ℓ^p مترافق مع الفضاء ℓ^q)

لدينا من العلاقة (*) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q} \Rightarrow q = p(q-1)$$

$$\Rightarrow p(q-1) - q + 1 = 1$$

$$p(q-1) - (q-1) = 1$$

$$(q-1)(p-1) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p-1 = \frac{1}{q-1}} \quad \text{or} \quad \boxed{q-1 = \frac{1}{p-1}}$$

• بعض المتراجحات الأساسية الهامة في الفضاء ℓ^p:

أولاً: المتراجحة المساعدة:

$$\alpha \cdot \beta \leq \frac{(\alpha)^p}{p} + \frac{(\beta)^q}{q}$$

حيث α و β عددين كيفيين موجبين.

ثانياً: متراجحة هولدر للجاميع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

دوماً الفضاء ℓ^p مترافق مع الفضاء ℓ^q حيث $1 \leq p \in \mathbb{R}$

و p و q يحققان العلاقة $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\forall x = (\xi_n)_{n\geq 1} \in \ell^p \quad , \quad y = (\eta_n)_{n\geq 1} \in \ell^q$$

ثالثاً: متراجحة كوشي شفارتز للجاميع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n)^2}$$

أو بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بحيث

$$\forall x = (\xi_n)_{n\geq 1} \in \ell^p \quad , \quad y = (\eta_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$$

ونحصل عليها بوضع $p = q = 2$ والتعويض في متراجحة هولدر للجاميع.

رابعاً: متراجحة منكوفسكي للجاميع:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث

$$\forall x = (\xi_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$$
$$y = (\eta_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$$

انتهت المحاضرة