كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• الفضاءات المترية :

تعريف الفضاء المتري: لتكن X مجموعة ما غير خالية ، ندعو كل دالة :

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

دالة مسافة على X إذا حققت الشروط التالية :

1. $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad ; \forall x,y \in X$
3. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad ; \forall x,y,z \in X$

وندعو الثنائية (X,d) فضاءً متريّاً أو اختصاراً X فضاء متري.

وندعو عناصر هذا الفضاء نقط الفضاء المتري

وندعو العدد الحقيقي غير السّالب $d(x,y)$ المسافة بين النقطتين x و y في الفضاء X بعد تثبيت النقطتين x و y.

• بعض الملاحظات :

1. الخاصة الأولى : تعني أنّ d دالة حقيقية غير سالبة
2. الخاصة الثانية : تعني أنّ المسافة بين أي نقطتين منطبقتين في X تكون معدومة أو تساوي الصفر
3. الخاصة الثالثة : ندعوها خاصة التّناظر
4. الخاصة الرابعة : وندعوها متراجحة المثلث وتعني أنّ مجموع طولي أي

ضلعين في المثلث أكبر أو يساوي إلى طول الضلع الثالثة

5- عندما $d(x,y)>0$ فإنّ $x \neq y$

6- يمكن تعميم متراجحة المثلث بالشكل التّالي

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_{n-1},x_n)$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X$$

• كل مجموعة جزئية $Y \subseteq X$ تشكل فضاء متري جزئي (Y,d) من الفضاء المتري X حيث المسافة d المعرّفة على X هي نفسها المسافة المعرفة على Y.

• بعض الأمثلة على الفضاءات المترية:

مثال(1): الفضاء المتري الحقيقي العادي أو المحور الحقيقي:

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرّف عليها المالة:

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ بالشكل التّالي: $\forall x,y \in \mathbb{R}: d(x,y) = |x-y|$

إنّ d مسافة على $\mathbb{R}$ نعوها المسافة العادية و $(\mathbb{R},d)$ أو اختصاراً $\mathbb{R}$ نعوه الفضاء المتري العادي أو المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ (يبرهن بالعملي)

مثال(2): الفضاء المتري المنقطع:

لتكن X مجموعة ماغير خالية ولنعرّف عليها المالة d بالشكل التّالي:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x=y \\ 1 & ; \ x \neq y \end{cases}$$

إذاً (X,d) أو X اختصاراً هو فضاء متري نعوه الفضاء المنقطع (يبرهن بالعملي)

مثال(3): الفضاء الاقليدي الحقيقي ذي n بُعداً وهو $\mathbb{R}^n$:

لتكن $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ مرة}} = \{x=(x_1,\dots,x_n) \ ; \ x_i \in \mathbb{R} \ ; \ i=1,2,\dots,n\}$

ولنعرّف على المجموعة $\mathbb{R}^n$ التّالة d بالشكل التّالي:

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

$$\forall\, x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

إنّ d مسافة على $\mathbb{R}^n$ نسمّيها المسافة الاقليدية و $(\mathbb{R}^n,d)$ أو اختصاراً $\mathbb{R}^n$ هو فضاء متري يُدعى الفضاء الاقليدي (يبرهن بالعملي)

- عندما $n=1$ نحصل على الفضاء المتري العادي $\mathbb{R}$ ويكون لدينا:

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=\left((x-y)^2\right)^{1/2}=|x-y| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

- عندما $n=2$ نحصل على الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^2$ والذي نسمّيه المستوي الاقليدي والمسافة الاقليدية هي:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \quad ; \quad \forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

- من أجل $n=3$ نحصل على الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$ والذي نسمّيه الفضاء الاقليدي ثلاثي الأبعاد (الفراغ العادي) ومسافته الاقليدية هي:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \quad ; \quad \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$$

مثال (4): الفضاء الوحدي $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C}^n=\underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\dots\times\mathbb{C}}_{n\text{ مرة}}=\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\ ;\ \xi_j\in\mathbb{C}\ ;\ \forall j=1,2,\dots,n\}$$

مجموعة أجزاء الديكارتي لـ $\mathbb{C}$ ذات n بُعد ولنعرّف على $\mathbb{C}^n$ الدالة d بالشكل التالي:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2} \quad ; \quad \forall x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n,\ y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)\in\mathbb{C}^n$$

إنّ d مسافة على $\mathbb{C}^n$ و $(\mathbb{C}^n,d)$ فضاءً متريّاً نسمّيه الفضاء الاقليدي العقدي ذي n بُعداً (الفضاء الوحدي).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- عندما $n=1$ نحصل على المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ومسافته هي:

$$d(z_1,z_2)=\sqrt{(z_1-z_2)^2}=|z_1-z_2| \quad ; \quad \forall z_1=x_1+y_1 i \in \mathbb{C}$$

$$z_2=x_2+y_2 i \in \mathbb{C}$$

$$; |z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

وإنّ $\mathbb{C}$ فضاء متري (يترك برهانه للعلي)

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z