كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعرّفنا سابقاً على تقريبات الدوال بكثيرات حدود الاستيفاء الماضي (لاغرانج ونيوتن ...) وتقريبات المربعات الصغرى.

وعلى الرغم من أهمية هذه التقريبات إلا أنها تتسم ببعض المزايا السلبية نذكر منها:

1. كثيرات حدود الاستيفاء ترتبط درجتها بعدد النقاط وبالتالي فإن زيادة عدد النقاط يؤدي للحصول على كثيرات حدود من درجات عالية وهذه الكثيرات الحدود تعاني من بعض الاختلافات الكبيرة عن الدالة الأصلية في بداية ونهاية مجال الاستيفاء $[x_0, x_n]$.
2. إن الحصول على تقريبات المربعات الصغرى يحتاج إلى حل جملة معادلات خطية في المعاملات المجهولة $a_0, a_1, \dots, a_n$ (كثيرة الحدود) صفوفتها معتلة الشرطية والحصول على الحل يحتاج إلى جهد حسابي كبير.

تلافي هذه العيوب سنُدخل مفهومين أساسيين هما التوزين وكثيرات الحدود المتعامدة.

التوزين: تُستخدم عادةً أعداد موجبة $\{w_i\}_{i=0}^{i=n}$ عددها يساوي عدد نقاط المعطيات وتُستخدم أيضاً مجموعة من النقاط الموجبة والقابلة للكاملة على المجال المستخدم تسمّى الأعداد الموجبة أوزاناً ويسمّى الدوال بدوال الوزن.

إن زيادة التوزين عند النقاط التي تقترب عن الدالة يساهم في

جذب هذه النقاط باتجاه المالة ويؤدي هذا إلى تحسين التقارب.

من أهم دوال الوزن:

① $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $x \in [-1,1]$

$\lim_{x\to 0} w(x) = 1$ & $\lim_{x\to \pm 1} w(x) = +\infty$

② $w_i(x) = \frac{1}{|x - x_i|}$; $\lim_{x\to x_i} w_i(x) = \infty$

• **التوابع المتعامدة:** توجد عدّة أنواع للتوابع الخاصة وهي دوال متعامدة تُستخدم في تطبيقات كثيرة نذكر منها كثيرات حدود تشيبشيف وليجندر وهيرميت وغيرها...

تعريف: نقول عن دالتين $f(x)$ و $g(x)$ معرّفتين ومستمرتين على المجال $[a,b]$ أنّهما متعامدتان فوق هذا المجال إذا تحقّق التكامل الآتي:

$$\int_a^b f(x).g(x).dx = 0$$

• بشكل عام: من أجل مجموعة من التوابع $\{f_i(x)\}$ حيث $i = 1,2,\dots$ معرفة ومستمرة فوق المجال $[a,b]$ نقول أنّها متعامدة مثنى مثنى بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x)$ فوق هذا المجال إذا تحقّق الآتي:

$$\int_a^b w(x) f_i(x) f_j(x) = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \quad \text{(المتعامد)} \\ \lambda_i & ; i = j \end{cases}$$

وهذا في الحالة المستمرة.

أمّا في الحالة المنفصلة تكون من أجل $n+1$ من النقاط المختلفة x_k حيث $k = 0, \dots, n$ يتحوّل التكامل إلى مجموع وهو:

$$\sum_{k=0}^{n} w_k f_i(x_k) f_j(x_k) = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \quad \text{(المتعامد)} \\ \lambda_i & ; i = j \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث k لـ الأوزان (أعداد موجبة)

■ كثيرات الحدود تشيبشيف:

نعرّف كثيرات حدود تشيبشيف من الدرجة n رياضياً كما يلي:

$T_n(x) = \cos[n \cdot \cos^{-1}(x)]$; $n = 0, 1, \ldots$ & $x \in [-1, 1]$

$n=0$: $T_0(x) = 1$ $\quad$ $n=1$: $T_1(x) = 1$

نفرض $\theta = \cos^{-1}(x) \Leftarrow x = \cos\theta \Leftarrow$ $\boxed{T_n(x) = \cos n\theta}$

$n=2$: $T_2(x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

$n=3$: $T_3(x) = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x$

يمكن الحصول على حدوديات تشيبشيف من مراتب أعلى بالاعتماد على خواصها.

■ خواص حدوديات تشيبشيف:

1 إنّ كثيرات حدود تشيبشيف تحقّق العلاقة التكرارية

$T_{n+1}(x) - 2x \cdot T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$; $n \geq 1$

الإثبات:

$\cos[(n+1)\theta] - 2\cos\theta \cdot \cos n\theta + \cos[(n-1)\theta] = 0$

لدينا العلاقة التالية صحيحة

$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos\theta \cdot \cos n\theta$

بحيث

$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta$

$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta$

$T_n(x) = \cos n\theta$

ملاحظة: يمكن استخدام هذه الخاصة في الحصول على حدوديات تشيبشيف من مراتب عليا بدلالة الحدوديتين السابقتين تماماً في هذه الحالة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$n+1=4$; $T_4(x) = 2x\,T_3(x) - T_2(x)$

$= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1)$

$= 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1$

$= 8x^4 - 8x^2 + 1$

$n+1=5$; $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

2. إنّ $T_{2i}(x)$ هي دالة زوجية لأنّها مجموع لقوى x الزوجيّة

$T_{2i+1}(x)$ هي دالة فردية لأنّها مجموع لقوى x الفردية

3. إنّ $|T_n(x)| \leq 1$ وذلك لأنّ:

$|T_n(x)| = |\cos\theta| \leq 1$

4. إنّ كثيرة حدود تشبيشيف $T_n(x)$ تملك n صفراً أو جذراً حقيقياً مختلفاً في المجال $[-1,1]$

$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$

الإثبات:

$T_n(x) = 0 \Rightarrow \cos n\theta = 0 \Rightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + \pi.k$

$\Rightarrow \theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$

$x_k = \cos\theta_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$

مثال: جذور $T_5(x)$ حيث $n=5$ و $k = 0, \ldots, 4$

$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.951056$

$x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 0.58778$

$x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0$

$x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) = -0.58778$

$x_4 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = -0.951056$

ملاحظة: $|x_{n+1}| = |x_{n-2}|$ و $|x_n| = |x_{n-1}|$.

5- إنّ صفريات تشيبشيف متعامدة متنى متنى بالنسبة لدالة الوزن $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ فوق المجال $[-1,1]$ في الحالة المستمرة

$$\int_{-1}^{1} \omega(x) \cdot T_i(x) \cdot T_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & ; \ i \neq j \quad (\text{تعامد}) \\ \pi & ; \ i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \ i = j \neq 0 \end{cases}$$

الاثبات:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{T_i(x) \cdot T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

تغير المتحول:

$$x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta$$

حيث $x \in [-1,1] \Leftarrow \theta \in [0,\pi]$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(i\theta)\cdot\cos(j\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} (-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(i\theta)\cdot\cos(j\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta}} \cdot \sin\theta\, d\theta \Rightarrow \int_{0}^{\pi} \cos(i\theta)\cdot\cos(j\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta]\, d\theta$$

نميز 3 حالات:

a- حالة التعامد $i \neq j$:

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j}\right]_0^{\pi} \Rightarrow I = 0$$

b- حالة $i = j = 0$:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+1)\, d\theta = \pi$$

c- حالة $i = j \neq 0$:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos 2i\theta + 1]\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2i\theta}{2i} + \theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

6- الحالة المنفصلة: إنّ صفريات تشبيف متعامدة متنى متنى في أصفار المعادلة $T_{n+1}(x)$ وهي:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

عدد النقاط هو $n+1$ من النقاط المختلفة حيث $k = 0, \dots, n$

والتعامد يكون من الشكل:

$$\sum_{k=0}^{n} T_i(x_k)\,T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \quad (\text{تعامد}) \\ n+1 & ; \quad i = j = 0 \\ \frac{n+1}{2} & ; \quad i = j \neq 0 \end{cases}$$

ملاحظة: لا تستخدم أوزان لأنّ أصفار تشبيشف تحل محلّها.

• تقريبات تشبيشف في الحالة المستمرة:

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على المجال $[-1, 1]$ ولتكن

$$P_m(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_m T_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i T_i$$

كثيرة حدود من الدرجة m بحيث $\{T_i\}_{i=0}^{n}$ حدوديات تشبيشف ولتكن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ دالة وزن

إنّ تقريب تشبيشف للدالة f بكثيرة حدود $P_m(x)$ تعطى بالعيار $\|f - P_m\|_2^2$ الآتي:

$$\|f - P_m\|_2^2 = \min_{a_0, \dots, a_m} \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x) - P_m(x)]^2\,dx$$

إنّ حلّ هذه المسألة يؤول إلى إيجاد نهاية صغرى لهذه المسألة لتعيين المعادلات المجهولة $a_0, \dots, a_m$ بشكل وحيد وبالتالي نفرض:

$$E(a_0, \dots, a_m) = \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x) - P_m(x)]^2\,dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, m$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow 2\int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x)-p_m(x)]\,T_i(x)\,dx = 0$$

حيث: $E(a_0,\dots,a_n) = \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x)-a_0T_0-a_1T_1-\dots-a_iT_i-\dots-a_mT_m]^2\,dx$

$$\frac{\partial E(a_0,\dots,a_n)}{\partial a_i} = -2\int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x)-a_0T_0-\dots-a_mT_m]\,T_i(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,T_i(x)\,dx - \int_{-1}^{1} w(x)\,p_m(x)\,T_i(x)\,dx = 0$$

• في حالة التعامد $i\neq j$:

حسب تعامد حدود يات تشيبيف

$$\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,T_i(x)\,dx - a_i\int_{-1}^{1} w(x)\,T_i(x)\,T_i(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,T_i(x)}{\int_{-1}^{1} w(x)\,T_i^2(x)\,dx}$$ حالة عامة

• حالة $i=j=0$

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,1\,dx}{\int_{-1}^{1} w(x)\,T_0^2(x)\,dx} = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,dx}{\pi}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,dx \quad (1)$$

حالة $i=j\neq 0$

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,T_i(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} w(x)\,T_i^2(x)\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,T_i(x)\,dx$$

حيث $i=1,\dots,m$

$$\Rightarrow a_i = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} w(x)\,f(x)\,T_i(x)\,dx \quad (2)$$

أي $i=1,\dots,m$

إنّ مواصفات التعامد سهّلت حساب المجاهيل من جملة معادلات خطية مصفوفتها من الدرجة $m+1$ إلى علاقة خطية بسيطة كما

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في ① و ②

ملاحظة: إنّ كثيرات حدود تشيبشيف معرّفة فقط فوق المجال $[-1,1]$ ولكن نستطيع ايجاد هذه التقريبات لأي دالة $f(x)$ فوق مجال ما ولكن من $[a,b]$ وذلك بتغيير المتحول إلى المجال $[-1,1]$ هذا التحويل يُعطى بالعلاقة:

$$x \in [a,b] \quad ; \quad t \in [-1,1]$$

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

مثال: $f(x)=x^2$ معرّفة على المجال $[0,1]$ نغير المتحول إلى المجال $[-1,1]$

$$x = \frac{1-0}{2} t + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(t+1)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{4}(t+1)^2$$

مسألة: لتكن لدينا الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ والمطلوب: ايجاد تقريبات تشيبشيف من الكوة (الدرجة 1) إلى $P_4(x)$ في المجال $[-1,1]$ ؟

الحل:

- $P_1(x) = a_0 T_0 + a_1 T_1 \qquad T_0 = 1 \;\&\; T_1 = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x) f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{2}{\pi} = 0.63662$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x) f(x) T_1(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$\Rightarrow P_1(x) = 0.63662 + 0(x) \Rightarrow P_1(x) = 0.63662$$

- $P_2(x) = a_0 T_0 + a_1 T_1 + a_2 T_2 \quad ; \quad T_2 = 2x^2 - 1$

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2 T_2$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_2(x)\, dx = -0.424413$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 0.63662 - 0.424413 \cdot (2x^2 - 1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow P_2(x) = 1.0603 - 0.848826\,x^2$

وظيفة: ايجاد P_3 و P_4 [سنجد أنّ $P_3(x) = P_4(x)$]

وظيفة (1): لتكن الدالة $f(t) = (t-1)\sqrt{2t-t^2}$ على المجال $[0,2]$ أوجد تقريب تشبيف التربيعي P_2.

وظيفة (2): $f'(t) = 2t\sqrt{12t-4t^2-8}$ على المجال $[1,2]$ المطلوب ايجاد P_1 و P_2.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة