كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مفهوم العنصر الغير قابل للاختزال في السّاحة الصّحيحة:

تعريف: لتكن D ساحة صحيحة و $x \in D$ ، $x \neq 0$ ، يُقال عن العنصر x بأنّهُ غير قابل للاختزال في D إذا تحقّق مايلي:

1. x عنصر غير قابل للقلب في D
2. إذا وُجِدَ $b, c \in D$ بحيث $x = bc$ عندئذٍ b قابل للقلب في D أو c قابل للقلب في D

مثال: لتكن لدينا الحلقة $D = \{a+bi \; ; \; a,b \in \mathbb{Z}\}$ في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ والمطلوب:

أثبت أنّ $x = 1+i$ غير قابل للاختزال في D ؟

الحل:

- إنّ $x = 1+i$ عنصر غير قابل للقلب في D والتّعليل بالشكل التالي:

لنفرض جدلاً $x = 1+i$ قابل للقلب في D

$$\Rightarrow \exists\, 0 \neq y = c+di \in D \; ; \; xy = 1$$

$$(1+i)(c+di) = 1$$

$$(c-d) + (c+d)i = 1$$

بالمطابقة $\begin{cases} c-d = 1 \\ c+d = 0 \end{cases} \Leftarrow c = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

بالتّالي الفرض الجدلي خاطئ و x عنصر غير قابل للقلب في D

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

ليكن $x = x_1 \cdot x_2$ حيث $x_1 = a+bi \in D$

$x_2 = c+di \in D$

$\Rightarrow 1+i = (a+bi)(c+di)$

بأخذ المرافق $1-i = (a-bi)(c-di)$

نضرب المعادلتين طرفاً إلى طرف

$$2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

الحالة الأولى: $\left.\begin{matrix} a^2+b^2=2 \\ c^2+d^2=1 \end{matrix}\right\}$

$\Leftarrow$ إما $c=0 \quad d=+1$

أو $c=0 \quad d=-1$

أو $c=1 \quad d=0$

أو $c=-1 \quad d=0$

$\Rightarrow x_2 = \left\{\begin{matrix} -i \\ +i \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right.$

ومنه فإنّ x_2 قابل للقلب في D

الحالة الثانية: $\left.\begin{matrix} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=2 \end{matrix}\right\}$

$\Leftarrow$ إما $a=0 \quad b=-1$

أو $a=0 \quad b=1$

أو $b=0 \quad a=-1$

أو $b=0 \quad a=+1$

$\Rightarrow x_1 = \left\{\begin{matrix} -i \\ +i \\ -1 \\ +1 \end{matrix}\right.$

ومنه فإنّ x_1 قابل للقلب في D

نستنتج ممّا سبق أنّ العدد $x = 1+i$ كُتِبَ على شكل جداء عددين من الحلقة D أحدهما قابل للقلب في D

$\Rightarrow$ من تحقّقت الشرطان السابقان نجد أنّ $x = 1+i$ غير قابل للاختزال في D.

تعريف: ساحة التحليل الوحيد UFD:

Unique Factorization Domain:

يُقال عن الساحة الصّحيحة D بأنّها ساحة تكامل وحيد إذا تحقّق الشرط التّالي:

كل عنصر مختلف عن الصفر وغير قابل للقلب في D يُكتب بشكل وحيد كجداء منتهٍ لعناصر غير قابلة للاختزال في D.

مثال: $\mathbb{Z}$ ساحة تكامل وحيد.

• حلقة القسمة (عامل الحلقة):

لتكن $(R,+,.)$ ساحة صحيحة ما. I ايديال في R. نعرّف علاقة تكافؤ على الحلقة R باستخدام الايديال I بالشكل:

$$\forall x,y \in R \; ; \; x \underset{I}{\sim} y \iff x+I = y+I \iff x-y \in I$$

مجموعة صنوف تكافؤ هذه العلاقة هي:

$$R/I = \{ x+I \; ; \; x \in R \}$$

نزوّد المجموعة R/I بعمليتين $+$ و $.$ بالشكل التّالي:

$$(x+I)+(y+I) = (x+y)+I$$

$$(x+I)\cdot(y+I) = x\cdot y + I$$

عندئذٍ $(R/I, +, .)$ حلقة تسمى حلقة القسمة

تعريف الحقل: هو حلقة تبديلية واحدية وكل عنصر فيها مغاير للصفر يملك مقلوب (يكون قابل للقلب) أو بمعنى آخر تسمى الثلاثية $(F,+,.)$ حقل إذا تحققت الشروط التالية:

1. $(F,+)$ زمرة تبديلية
2. $(F\setminus\{0\},.)$ زمرة تبديلية
3. الضرب توزيعي على الجمع

مثال: $(\mathbb{Q},+,.)$ حقل الأعداد الكسرية

$(\mathbb{R},+,.)$ حقل الأعداد الحقيقية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حقل الأعداد العقدية

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ حيث p عدد أولي تكون حقل

ملاحظة 1: كل ساحة صحيحة منتهية هي حقل

ملاحظة 2: I ايديال في R

I ايديال أولي في R $\Leftrightarrow$ R/I ساحة صحيحة

I ايديال أعظمي في R $\Leftrightarrow$ R/I حقل

ملاحظة: ليكن F حقلاً و K مجموعة جزئية في F تحوي عنصرين على الأقل، الشرط اللازم والكافي كي يكون K حقلاً جزئياً في F هو أن تتحقق الشروط التالية:

$$\forall a,b \in K \Rightarrow a-b \in K \quad .1$$

$$\forall a,b \in K^* = K \setminus \{0\} \Rightarrow a.b^{-1} \in K \quad .2$$

أو بأسلوب آخر:

$$\forall a,b \in K \Rightarrow a-b \in K \quad .1$$

$$\forall a,b \in K \Rightarrow a.b \in K \quad .2$$

$$\forall o \neq a \in K \Rightarrow a^{-1} \in K \quad .3$$

تمرين: أثبت أنّ $K = \{a+b\sqrt{2} \; ; \; a,b \in \mathbb{Q}\}$ حقل جزئي في $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية؟

الحل:

$$\forall x,y \in K \overset{?}{\Rightarrow} x-y \in K$$

$$x = a_1 + b_1\sqrt{2} \; ; \; a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$$

$$y = a_2 + b_2\sqrt{2} \; ; \; a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x-y = (a_1 + b_1\sqrt{2}) - (a_2 + b_2\sqrt{2}) =$$

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} \; ; \; (a_1 - a_2) \in \mathbb{Q}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

& $(b_1 - b_2) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

- $\forall x, y \in K$; $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$; $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$

$y = a_2 + b_2\sqrt{2}$; $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$

$\overset{?}{\Rightarrow} x.y \in K$

$x.y = (a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2}) =$

$\underbrace{(a_1a_2 + 2b_1b_2)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(a_2b_1 + a_1b_2)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} \in K$

$\Rightarrow x.y \in K$

- $\forall x \in K^* \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1} \in K$; $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$

$a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$

$x^{-1} = \frac{1}{a_1 + b_1\sqrt{2}} = \frac{a_1 - b_1\sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2} =$

$\underbrace{\left(\frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\left(\frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} \in K$

$\Rightarrow x^{-1} \in K$

مما سبق نجد أنّ K حقل جزئي في $\mathbb{R}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة