كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

ملاحظة: كل ايديال أعظمي هو ايديال أولي في أي ساحة صحيحة والعكس ليس بالضرورة صحيح.

تعريف: ساحة الايديالات الرئيسية PID
principal Ideal Domain

يُقال عن الساحة الصحيحة D بأنّها ساحة ايديالات رئيسة إذا كان كل ايديال فيها هو ايديال رئيسي.

مثال: $\mathbb{Z}$ (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي ساحة ايديالات رئيسية

مثال 1: أثبت أنّ الايديال $I=\{7t \; ; \; t\in\mathbb{Z}\}$ هو ايديال أولي في $\mathbb{Z}$؟

الحل:

$$\forall x,y\in\mathbb{Z} \; ; \; x.y\in I$$
$$\overset{??}{\Longrightarrow} x\in I \text{ or } y\in I$$

$x.y\in I=\{7t \; ; \; t\in\mathbb{Z}\}$

$x.y=7t_1 \; ; \; t_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow 7 \mid x.y$

بما أنّ 7 عدد أولي بالتالي

$7\mid x$ or $7\mid y$

$\Rightarrow x=7t_2$ or $y=7t_3$; $t_2,t_3\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x\in I$ or $y\in I$

وبالتالي I ايديال أولي في $\mathbb{Z}$

مثال 2: ليكن p عدد أولي أثبت أنّ الايديال $I=\langle p\rangle=\{pt \; ; \; t\in\mathbb{Z}\}$ أعظمي في $\mathbb{Z}$؟

الحل: نفرض وجود ايديال J في $\mathbb{Z}$ يحقق $I \subsetneq J \subseteq \mathbb{Z}$

ونثبت أنّ $J = \mathbb{Z}$.

$I = \langle p \rangle \subsetneq J \subseteq \mathbb{Z}$

بما أنّ $\mathbb{Z}$ ساحة ايديالات رئيسية عندئذٍ J ايديال رئيسي في $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow J = \langle m \rangle$; $m \in \mathbb{Z}$.

$p \in \langle p \rangle \subsetneq \langle m \rangle \Rightarrow p \in \langle m \rangle \Rightarrow p = m t_1$; $t_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m \mid p \Rightarrow m \in \{-1, 1\}$

$\Leftarrow$ m عنصر قابل للقلب في $\mathbb{Z}$ بالتالي $J = \mathbb{Z}$.

مثال 3: لتكن $M_2(\mathbb{R})$ حلقة المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية علماً أنّ $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \text{ ; } x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

حلقة جزئية في $M_2(\mathbb{R})$

ولتكن لدينا المجموعة I:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ; } x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

والمطلوب:

1- أثبت أنّ I ايديال في D

2- أثبت أنّ I ايديال أولي في D.

3- أثبت أنّ I ايديال أعظمي في D.

الحل:

$\phi \neq I \subseteq D$ ☐

$\forall a, b \in I \overset{??}{\Rightarrow} a - b \in I$

$$a = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ; } x_1, y_1 \in \mathbb{R} \qquad b = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ; } \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \in \mathbb{R}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow a-b=\begin{pmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I$$

$$\forall c\in D \;\&\; a\in I \overset{??}{\Rightarrow} c.a\in I$$

$$c=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow c.a=\begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I$$

نستنتج ممّا سبق أنّ I ايديال في D

2 $\forall a,b\in D\;;\; a.b\in I \overset{?}{\Rightarrow} a\in I \text{ or } b\in I$

$$a=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a.b=\begin{pmatrix} x_1.x_2 & x_1y_2+y_1z_2 \\ 0 & z_1.z_2 \end{pmatrix}\in I$$

$$\Rightarrow z_1.z_2=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إمّا} & z_1=0\Rightarrow a\in I \\ \text{أو} & z_2=0\Rightarrow b\in I \end{cases}$$

3 نفرض وجود ايديال J في D يحقّق $I\subsetneq J\subseteq D$

ولنثبت أنّ $J=D$

حتّى نثبت أنّ $J=D$ يجب أن نثبت أنّ $1_D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in D$

وحتّى نبرهن أنّ $1_D\in J$ يجب أن نثبت أنّ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in J$$

• اثبات أنّ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in J$:

بما أنّ $I\subsetneq J$ عندئذٍ يوجد $a\in J$ و $a\notin I$

$$\Rightarrow a=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\;;\; z\neq 0$$

ولدينا $b=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}\in D$

بالتّالي $b.a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J$

• اثبات أنّ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \underset{+}{\subset} J \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$

مما سبق نجد أنّ $\frac{1}{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J$

$\Rightarrow J = D$

بالتّالي I ايديال أعظمي

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z