كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• مفهوم الحلقة في البنى الجبرية:

تعريف: الحلقة $(R,+,.)$ هي مجموعة غير خالية مزوّدة بقانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(.)$:

$+ : R \times R \to R$

$+(a,b) \to a+b$

$. : R \times R \to R$

$.(a,b) \to a.b$

بحيث تتحقق الشروط التالية:

1- $(R,+)$ زمرة تبديلية.

2- $(.)$ تجميعي على عناصر R، أي:

$\forall a,b,c \in R \; ; \; (a.b).c = a.(b.c)$

3- $(.)$ توزيعي على $(+)$ من اليسار ومن اليمين.

$\forall a,b,c \in R \; ; \; a.(b+c) = a.b + a.c$

$\& \; (b+c).a = b.a + c.a$

تعريف: • $(R,+,.)$ حلقة، ما يُقال بأنّ الحلقة $(R,+,.)$ تبديلية إذا تحقّق الشرط التالي: $\forall x,y \in R \; ; \; x.y = y.x$

• يُقال بأنّ الحلقة $(R,+,.)$ واحدية إذا وُجِدَ في R عنصر حيادي بالنسبة للعملية $(.)$ أي إذا وُجِدَ $e \in R$ بحيث

$\forall a \in R \; ; \; a.e = e.a = a$

• نرمز لحيادي الحلقة بالنسبة للعملية $(+)$ بـ 0_R ونعوه صفر الحلقة.

• نرمز لحيادي الحلقة بالنسبة للعملية $(.)$ بـ 1_R ونعوه واحد الحلقة.

مثال 1: إنّ $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ حلقة تبديلية واحدية حيث $0_{\mathbb{Z}_4} = 0$ و $1_{\mathbb{Z}_4} = 1$

مثال 2: $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ حلقة الأعداد الصحيحة قياس n.

حيث العملية $+_n$ معرّفة بالشكل: $\forall a,b \in \mathbb{Z}_n \; ; \; a +_n b = t$

(باقي قسمة $(a+b)$ على العدد n) $= t$

والعملية $\cdot_n$ معرّفة بالشكل: $\forall a,b \in \mathbb{Z}_n \; ; \; a \cdot_n b = t$

(باقي قسمة $(a \cdot b)$ على العدد n) $= t$

تعريف: $(R, +, \cdot)$ حلقة و $\emptyset \neq H \subseteq R$، يُقال بأنّ H حلقة جزئية من الحلقة R إذا تحقّقت الشرطان التاليان:

① $\forall x,y \in H \; ; \; x - y \in H$

② $\forall x,y \in H \; ; \; x \cdot y \in H$

تعريف: لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية و $a \neq 0_R \; a \in R$

• يُقال عن العنصر a بأنّه قابل للقلب في R إذا تحقّق الشرط التالي:

$\exists a \neq b \in R \; ; \; a \cdot b = b \cdot a = 1_R$

• يُقال عن العنصر a بأنّه قاسم للصّفر في R إذا وُجِدَ عنصر $a \neq b \in R$ بحيث $a \cdot b = b \cdot a = 0_R$

تعريف: المساحة الصّحيحة (المنطقة التكاملية):

يُقال عن الحلقة $(R, +, \cdot)$ بأنّها مساحة صحيحة إذا كانت الحلقة R تبديلية وواحدية وتامة (لا تحوي قواسم لصفر الحلقة)

مثال: لتكن لدينا الحلقة $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$، المطلوب:

1- أوجد حبدك العمليتين $(+_6)$ و $(\cdot_6)$ في $\mathbb{Z}_6$؟

2- أوجد قواسم الصّفر والعناصر القابلة للقلب في الحلقة $\mathbb{Z}_6$؟

الحل:

①

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

جدول العملية $(+_6)$:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

جدول العملية $(\cdot_6)$:

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

• للبحث عن قواسم الصفر عن جدول العملية الثانية نبحث عن أعداد مغايرة للصفر وجداءها يساوي الصفر.

• للبحث عن العناصر القابلة للقلب من جدول العملية الثانية العناصر التي جداءها = 1

② - قواسم العدد صفر هي $\{2,3,4\}$ ، العناصر القابلة للقلب هي $\{1,5\}$

ملاحظة: أنّ الحلقة $\mathbb{Z}_6$ ليست تامة لأنّها تحوي قواسم للصفر

$\mathbb{Z}_6$ ليست ساحة صحيحة.

• مفهوم المديال (المثالي) Ideal في الحلقة:

تعريف: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و I مجموعة جزئية غير خالية من R يُقال إنّ I اديال في R إذا تحقّق مايلي:

① $\forall x,y \in I \;;\; x-y \in I$

② $\forall x \in I \;\&\; r \in R \;;\; rx \in I$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إنّ $I=3\mathbb{Z}$ ايديال في الحلقة $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

الاثبات: $I=3\mathbb{Z}=\{3t \;;\; t\in\mathbb{Z}\}$

لدينا $\phi\neq I=3\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$

$\forall x,y\in I \;;\; x=3t_1 \;;\; t_1\in\mathbb{Z} \;\&\; y=3t_2 \;;\; t_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x-y=3t_1-3t_2=3(t_1-t_2)=3t \;;\; t=(t_1-t_2)\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x-y)\in 3\mathbb{Z}=I$

$\forall x\in I \;\&\; r\in\mathbb{Z} \;;\; x=3t_1 \;;\; t_1\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow rx=r(3t_1)=3(rt_1)=3t \;;\; t=rt_1\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow rx\in I$

ممّا سبق نجد أنّ I ايديال في $\mathbb{Z}$

ملاحظة: إذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية و I ايديال في R عندئذٍ:

- $I=R \iff \frac{1}{R}\in I$
- I يملك عنصر قابل للقلب في الحلقة R عندئذٍ $I=R$

- أنواع الايديالات:

1. الايديال الرئيسي: لتكن R حلقة ما، و I ايديال في R يُقال عن I أنّه ايديال رئيسي في R إذا وُجد $x\in I$ بحيث

$I=\langle x\rangle=xR=\{xr \;;\; r\in R\}$

ويُدعى x مولّد هذا الايديال

مثال: $I=5\mathbb{Z}=\langle 5\rangle$ ايديال رئيسي في $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

2. الايديال الأولي (البسيط): ليكن I ايديال خاص في الحلقة D يُقال إنّ I ايديال أولي في الحلقة D إذا تحقّق الشّرط التّالي:

$\forall x,y\in D \;;\; xy\in I \Rightarrow x\in I \text{ or } y\in I$

3. الايديال الأعظمي: ليكن I ايديال خاص في الحلقة D يُقال إنّ I ايديال

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أعظمي في الحلقة D إذا كان من أجل كل المثالي J في الحلقة D بحيث

$$I \subsetneq J \subseteq D$$

فإن $J = D$

انتهت المحاضرة