كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تذكرة ببعض مفاهيم البنى الجبرية

تعريف الزمرة $(G,*)$: المجموعة G غير الخالية والمزوّدة بقانون تشكيل داخلي $*$

$$*: G\times G \to G$$

$$*: (a,b) \to a*b$$

تسمّى زمرة إذا حقّقت الشروط التّالية:

1. $*$ تجميعية على عناصر G: $\forall a,b,c \in G \; ; \; (a*b)*c = a*(b*c)$
2. الحيادي: يوجد في G عنصر حيادي بالنّسبة لـ $*$ نرمز له بـ e ويحقّق الشرط: $\forall a \in G \; ; \; a*e = e*a = a$
3. المقلوب (المعكوس): يوجد لكل عنصر $a \in G$ عنصر $b \in G$ يحقّق $a*b = b*a = e$

حيث e العنصر الحيادي في G بالنّسبة للعملية $*$

نسمي العنصر b مقلوب (معكوس) العنصر a ونكتب عندئذٍ $b = a^{-1}$

ملاحظة: لتكن $(G,*)$ زمرة يقال إنّ $(G,*)$ زمرة تبديلية إذا تحقّق الشرط التّالي: $\forall x,y \in G \; ; \; x*y = y*x$

مثال 1: $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية الحيادي في هذه الزمرة الصّفر

مثال 2: $(\mathbb{Z},\cdot)$ ليست زمرة لأنّه

إذا أخذنا مثلاً العدد 2 مقلوبه (المعكوس) $\frac{1}{2}$ $\mathbb{Z}$

مثال 3: زمرة الجمع بالقياس للعدد الصحيح $n \geq 1$

$$\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

$\forall x,y \in \mathbb{Z}_n \; ; \; x +_n y = t$: حيث العملية $(+_n)$ عملية الجمع معرّفة بالشكل

حيث t باقي قسمة $(x+y)$ على العدد n

نلاحظ أنّ $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ زمرة تبديلية والحيادي فيها هو 0

مثال: أوجد جدول العملية $+_n$ في الزمرة $\mathbb{Z}_6$ حيث:

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

ثمّ حدّد معكوس كل عنصر في هذه الزمرة ؟

الحل:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

إيجاد معكوس كل عنصر

a	0	1	2	3	4	5
$\bar{a}^{-1}$	0	5	4	3	2	1

تعريف: $(G,*)$ زمرة و $\emptyset \neq H \subseteq G$ ، يُقال بأنّ H زمرة جزئيّة من الزمرة G إذا تحقّق الشرط التالي:

$\forall x,y \in H \; ; \; x * y^{-1} \in H$

مثال: لتكن $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية أثبت أنّ

$H = \{a+bi \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \;\; \& \;\; a^2+b^2 = 1\}$

زمرة جزئية من زمرة الأعداد العقدية بالنسبة لعملية ضرب الأعداد العقدية ؟

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أنّ $H \subseteq G$ و $H \neq \phi$ ولنثبت أنّ $\forall x,y \in H \overset{?}{\Rightarrow} x.y^{-1} \in H$

$x = a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$ & $a^2+b^2=1$

$y = c+di$; $c,d \in \mathbb{R}$ & $c^2+d^2=1$

$$\Rightarrow x.y^{-1} = (a+bi).\frac{1}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} =$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}\,i = (ac+bd)+(cb-ad)i$$

$$= t_1 + t_2 i$$

حيث $t_1 = ac+bd$ & $t_2 = cb-ad$

$$t_1^2+t_2^2 = (ac+bd)^2+(cb-ad)^2 = a^2c^2+b^2d^2+c^2b^2+a^2d^2$$
$$+2acbd-2acbd = a^2c^2+b^2d^2+c^2b^2+a^2d^2$$
$$= (a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2 = (a^2+b^2).(c^2+d^2) = 1$$

نلاحظ أنّ $x.y^{-1} = t_1+t_2 i \in H$

وبالتالي H زمرة جزئيّة من زمرة الأعداد العقديّة.

• المرافقات اليسارية واليمينية لزمرة جزئية H في الزمرة $(G,*)$:

تعريف: لتكن $(G,*)$ زمرة و H زمرة جزئيّة في G و $a,b \in G$

نسمي المجموعة $a*H = \{a*h \;;\; h \in H\}$

حيث h مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في G.

ونسمي المجموعة $H*b = \{h*b \;;\; h \in H\}$

حيث h مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G.

ملاحظة: $(G,*)$ زمرة و H زمرة جزئية في G عندئذٍ

$$a*H = b*H \iff a^{-1}.b \in H$$

تعريف: الزمرة الجزئية الناظميّة:

لتكن $(G,*)$ زمرة و H زمرة جزئيّة في G، يُقال إنّ H زمرة جزئيّة ناظميّة إذا تحقّق الشرط التالي: $\forall a \in G \quad a*H = H*a$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: كل زمرة جزئية H من زمرة تبديلية تكون ناظميّة

• زمرة القسمة (عامل الزمرة):

لتكن $(G,.)$ زمرة و H زمرة جزئية ناظميّة في الزمرة G نعرّف علاقة تكافؤ على الزمرة G بالشكل:

$$\forall a,b \in G \; ; \; a \underset{H}{\sim} b \iff a.H = b.H$$

مجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي: $G/H = \{xH \; ; \; x \in G\}$

المجموعة G/H تزوّد بعملية جداء الصفوف بالشكل:

$$(xH).(yH) = (xy).H$$

نلاحظ بأنّ $(G/H, .)$ زمرة وتسمّى زمرة القسمة أو عامل الزمرة والحيادي فيها هو H

مثال: $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية و $H = 3\mathbb{Z} = \{3t \; ; \; t \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $\mathbb{Z}$ والمطلوب:

1- أوجد المرافقات اليسارية لـ H في $\mathbb{Z}$ ؟

2- أوجد $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (عامل الزمرة) ؟

الحل:

1- أي مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في $\mathbb{Z}$ هي من الشكل:

$$a+H \; ; \; a \in \mathbb{Z}$$

نعلم بأنّ $\forall x \in \mathbb{Z} \; ; \; x = 3q + r \; ; \; 0 \leq r < 1$

$$x + H = r + H \iff x - r = 3q \in H$$

بالتالي المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية في $\mathbb{Z}$ هي:

$$H, \; 1+H, \; 2+H$$

2- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{H, 1+H, 2+H\} = \{3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}\}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z