كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الأعداد العقدية:

العدد العقدي z: يكتب بالشكل الجبري $z = x + iy$

أو $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad i = \sqrt{-1}$

حيث كل من x, y أعداد حقيقية

i العنصر التخيلي

x و كل من y, x الجزء التخيلي و الحقيقي للعدد العقدي z و يكتب

بالشكل: $\operatorname{Im} z = y$ (الجزء التخيلي)

$\operatorname{Re} z = x$ (الجزء الحقيقي)

- نسمي العدد العقدي $\bar{z} = x - iy$ مرافق العدد العقدي z
- نقول عن العددين العقديين: $z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

إنهما متساويان إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$

مثال: أوجد حل المعادلة حيث $z = x + iy$

$z = 3x + 2 + iy$

الحل:

$x + iy = 3x + 2 + iy$

$x = 3x + 2 \Rightarrow x = -1$

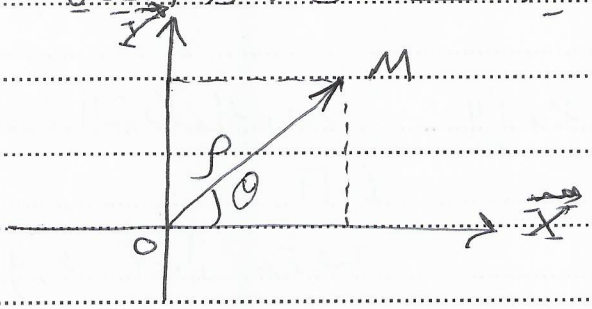
$y = y \Rightarrow y \in \mathbb{R}$

* يمثل العدد العقدي $Z=x+iy$ بالنقطة M وإحداثياتها (x,y)

حيث:

$\overrightarrow{oX}$ هو المتجه على المحور الحقيقي

$\overrightarrow{oY}$ هو المتجه على المحور التخيلي



- θ تدعى: الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{oM}$ مع المحور الحقيقي $\overrightarrow{oX}$ وتسميها سعة العدد العقدي (زاوية العدد العقدي) ونرمز لها بالرمز $\theta = Arg\,z$ حيث:

$$\theta = Arg\,z = arg\,z + 2\pi k \quad ; \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

- حيث $arg\,z$ الزاوية الأساسية (السعة الأساسية) للعدد العقدي z وتحقق:

$$-\pi < arg\,z \leq \pi$$

ويتم حسابها بالعلاقة التالية:

$$arg\,z = \begin{cases} arc\,tg\,\frac{y}{x} & ; \quad x > 0 \\ \pi + arc\,tg\,\frac{y}{x} & ; \quad x < 0 \ \& \ y \geq 0 \\ -\pi + arc\,tg\,\frac{y}{x} & ; \quad x < 0 \ \& \ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x = 0 \ \& \ y > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & ; \quad x = 0 \ \& \ y < 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة ثانية:

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

نعرف طول المتجه $\overrightarrow{OM}$ بطويلة العدد العقدي ونرمز لها بـ ρ

$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ويعطى بالعلاقة

العمليات على الأعداد العقدية:

ليكن لدينا العددين العقديين:

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

① الجمع:

$$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)i$$

② الطرح:

$$z_1 - z_2 = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$$

③ الضرب:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

④ القسمة:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

حالة خاصة $z_1 = 1$

$$z_2^{-1} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

مثال: أثبت أن:

① $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$
$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$
$$= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2$$
$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

② $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

③ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

⑤ $\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z$

توضيح: العلاقات من ① إلى ⑤ هي خواص مرافق العدد العقدي

مثال: أوجد حل المعادلة:

$$(4 + i2)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$
$$4x + 5y + i(2x - 3y) = 13 + i$$
$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

★ اكتب العدد العقدي بالشكل الجبري:

$$z = \frac{1}{(a+ib)^2} + \frac{1}{(a-ib)^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(a^2-b^2)+2iab=w^2$ $\quad z\cdot\bar{z}=|z|^2$

$|w^2|^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$

$=a^4+b^4-2a^2b^2+4a^2b^2$

$=a^4+b^4+2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2$

$(a-ib)^2=a^2-b^2-2iab$ $\quad \bar{w}^2$

$a+ib=w \qquad a-ib=\bar{w}$

$$z=\frac{1}{w^2}+\frac{1}{\bar{w}^2}=\frac{w^2+\bar{w}^2}{w^2\cdot\bar{w}^2}=\frac{2(a^2-b^2)}{|w^2|^2}$$

$$=\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

$|w^2|=\sqrt{(a^2+b^2)^2}$

أوجد طويلة وزاوية العدد العقدي ×

$$z=-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$$

$$|z|=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}}=1$$

$x=-\sin\frac{\pi}{8}<0,\quad y=-\cos\frac{\pi}{8}<0$

$$\arg z=-\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

$$=-\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=-\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=-\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=-\frac{5}{8}\pi$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الشكل المثلثي والأسي للعدد العقدي Z :

* أي عدد عقدي $z = x + iy$; $z \neq 0$ يمكن كتابته بالشكل الآتي

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad ; \quad \rho = |z|$$

$$\theta = \text{Arg } z$$

مثال :

$$z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$x = -1 \qquad y = -\sqrt{3}$$

$$\rho = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-2\pi}{3}$$

أو/ح $\theta = -\pi + \text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{2}{3}\pi$

* أوجد حل المعادلة :

$$\cos x + i\sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{13}{16} + 1$$

غير قابلة للحل.

* أي عدد عقدي $z = x + iy$ يمكن كتابته بالشكل الأسي :

$$z = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \rho = |z| \qquad \theta = \text{Arg } z$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد كل الأعداد العقدية $z \neq 0$ وتحقق المعادلة

$$z^{n-1} = \bar{z}$$

نفرض أن $z = \rho e^{i\theta}$

$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^{n-2} e^{in\theta} = 1 \Rightarrow \rho^{n-2} = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$e^{in\theta} = e^{i2k\pi}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \; , \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n-1$$

$$z_k = 1 e^{i\frac{2\pi k}{n}} \; ; \; k = 0, \ldots, n-1$$

* ليكن لدينا العددين العقديين:

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_2) = \rho_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 . z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} \; (; z_2 \neq 0) = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$z_1 . z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \; (; z_2 \neq 0) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^2 = z \cdot z = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

$z^4 = z^2 \cdot z^2 = \rho^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

⋮

$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

صيغة دي موافر: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

* خواص طويلة المعقد:

① $|\bar{z}| = |z|$

② $z\bar{z} = |z|^2$

③ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

④ $|z^n| = |z|^n$

⑤ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$

⑥ $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

⑦ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

⑧ $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

* أثبت أن $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ يقبل القسمة على x^2+1

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x^2+1 = (x+i)(x-i)$: الحل

$f(i) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - i\sin n\alpha$

$= \cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha - i\sin n\alpha = 0$

$f(-i) = 0$

$\Leftarrow$ $f(x)$ يقبل القسمة على x^2+1

مثال وظيفة: أثبت أن $f(x) = x\sin\alpha - \lambda x\sin n\alpha + \lambda^2\sin(n-1)\alpha$

يقبل القسمة على $x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2$

- قوى العدد العقدي:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

- الجذر النوني للعدد العقدي z يكون على الشكل التالي:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$k = 0, \dots, n-1$

مثال: أوجد كل الجذور للعدد $\sqrt[4]{1-i}$

الحل: $z = 1-i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

$$\theta = \arctg(-1) = \frac{-\pi}{4}$$

$$z_{\substack{k \\ k=\overline{0,3}}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi k}{4}\right)$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi + i\sin\frac{7}{16}\pi\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{15}{16}\pi i}$

$k=3 \Rightarrow z_3 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{23}{16}\pi i}$

$Im\, z^2 > 0$

نفرض $z = x + iy$

$z^2 = (x+iy)^2$

$= x^2 - y^2 + 2xyi$

$Im\, z^2 = 2xy$

$2xy > 2$

$xy > 1$

مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة النقاط الواقعة في الربعين الأول والثالث أعلى وأسفل القطع الزائد.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z