كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ميكانيك (1)

المحاضرة الأولى معلوم

السؤال الأول: تتحرك نقطة مادية على دائرة وفق المعادلة:

$$S = 50 + 6t + \frac{1}{12}t^2$$

حيث t هو الزمن ويقدر بالثانية، و S هي الفاصلة (طول القوس) وتقدر بـ cm والمطلوب:

1) عين السرعة الوسطى لهذه النقطة خلال الستة ثوانٍ الأولى، وثم خلال الستة ثوانٍ الثانية.

2) أوجد سرعة النقطة في نهاية الفترة الأولى، وفي نهاية الفترة الثانية.
وما هو طول القوس الذي تقطعه النقطة عندما تصبح سرعتها 10 cm/s.

الحل: 1)

■ السرعة الوسطى في المرحلة الأولى:

في اللحظة $t_1 = 0$ كانت النقطة في الموضع $S_1 = S(0) = 50\ cm$

في اللحظة $t_2 = 6$ كانت النقطة في الموضع $S_2 = S(6) = 89\ cm$

$$\Rightarrow v_1^* = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{89 - 50}{6 - 0} = \frac{39}{6}\ cm/s$$

■ السرعة الوسطى في المرحلة الثانية (خلال $t_2 = 6$ و $t_3 = 12$)

في $t = 12$ كانت النقطة في الموضع $S_3 = 134\ cm$

$$\Rightarrow v_2^* = \frac{S_3 - S_2}{t_3 - t_2} = \frac{134 - 89}{12 - 6} = \frac{45}{6}\ cm/s$$

2) السرعة اللحظية تعطى بالعلاقة $v = \frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{6}t + 6}$$

- فتكون السرعة اللحظية في نهاية الفترة الأولى (أي في اللحظة $t = 6$):

$$v(6) = 6 + \frac{1}{6}(6) = 7 \text{ cm/s}$$

- والسرعة اللحظية في نهاية الفترة الثانية (أي عندما $t = 12$):

$$v(12) = (12)\frac{1}{6} + 6 = 8 \text{ cm/s}$$

- إيجاد طول القوس عندما $v = 10 \text{ cm/s}$:

$$v = \frac{1}{6}t + 6 \underset{\text{عندما } v=10}{\Rightarrow} 10 = \frac{1}{6}t + 6 \Rightarrow t = 24$$

نعوض الزمن $t = 24$ في معادلة الحركة $s = s(t)$ فنحصل على طول القوس عندما تكون $v = 10$

$$\Rightarrow s(24) = 50 + 6(24) + \frac{1}{12}(24)^2 = 242 \text{ cm}$$

السؤال الثاني: أوجد قانون الحركة $s(t)$ لنقطة مادية M سرعتها $v = 2t + 10$ إذا علمت أنه في اللحظة $t = 0$ كانت فاصلة النقطة $s = 6$.

الحل:

$$s = \int v\,dt = \int (2t + 10)\,dt$$

$$= t^2 + 10t + C$$

لإيجاد الثابت c نعوض شرط البدء ($t=0$ ، $s=6$)

$$\Rightarrow 6 = (0)^2 + 10(0) + c \quad \Rightarrow c = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = t^2 + 10t + 6}$$

السؤال الثالث: نقطة مادية تتحرك في المستوى xOy وفق المعادلات:

$$x = \frac{a^2 t^2}{2p} \quad , \quad y = at$$

- نفرض أن p و a عددان ثابتان.

المطلوب: 1) عين معادلة مسار النقطة.

2) احسب السرعة العددية للنقطة.

3) أوجد معادلة مماس المسار في النقطة الموافقة لـ $t = 2$.

الحل:

1) لإيجاد المسار نحذف الزمن من معادلات الحركة

لدينا $x = \frac{(at)^2}{2p}$ <= نعوض $y = at$ في x فنجد

$$x = \frac{y^2}{2p} \Rightarrow \boxed{y^2 = 2px} \leftarrow \text{معادلة المسار}$$

فالمسار عبارة عن قطع مكافئ محوره منطبق على $\overrightarrow{Ox}$ ، ورأسه مبدأ الإحداثيات.

2) إيجاد السرعة العددية:

$\vec{v} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$

$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; $x'(t) = \frac{a^2}{\rho}t$ ، $y'(t) = a$

$= \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{\rho^2}t^2} = a\sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2}t^2}$

3) معادلة المماس باللحظة $t = 2$.

نعلم أن معادلة المستقيم المار من النقطة (x_0, y_0) والموجه بالشعاع (a, b)، تعطى بالعلاقة: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ ... (*)

وكذلك نعلم أن شعاع السرعة محمول على مماس المسار، وبالتالي أصبح لدينا المماس عندما $t = 2$ موجه بالشعاع $\vec{v}(2)$ ويمر من النقطة $(x(2), y(2))$

$\vec{v}(2) = (x'(2), y'(2)) = \left(\frac{2a^2}{\rho}, a\right)$

$(x(2), y(2)) = \left(\frac{2a^2}{\rho}, 2a\right)$ ... (**)

نعوض (**) في (*):

$$\frac{x - \frac{2a^2}{\rho}}{\frac{2a^2}{\rho}} = \frac{y - 2a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2a^2}x - 1 = \frac{y}{a} - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{a} = \frac{\rho}{2a^2}x + 1$$

نضرب الطرفين بـ a $\Rightarrow \left[y = \frac{\rho}{2a}x + 1 \right]$ ← وهي معادلة المماس في اللحظة $t = 2$

مكتبة A to Z