كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تذكرة ببعض المفاهيم الأساسية:

إذا كانت E مجموعة غير خالية فإننا نعني بعملية داخلية على E أو قانون تركيب داخلي على كل تطبيق:

$$f: E \times E \to E$$

أي أنّ صورة أي عنصر من E وفق f هو عنصر من E

يرمز لقوانين التركيب عادةً بالرمز:

$$a+b \;,\; a.b \;,\; ab \;,\; a*b$$

* بنية الزمرة لنصف الزمرة (Semi group)

هي مجموعة غير خالية E ، مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي، يرمز للزمرة الثنائية $(E, *)$

$$\forall x,y,z \in E : (x*y)*z = x*(y*z)$$

* العنصر الحيادي: هو عنصر نحوي عنصراً أمامياً e أي:

$$\forall x \in E;\; x*e = e*x = x$$

* الزمرة group: هي مزودة لكل عنصر منه نظير

$$\forall x \in E, \exists x' \in E;\; x*x' = x'*x = e$$

* تذكر إننا نقول عن تطبيق ما $f: X \to X$ إنه تطبيق تقابلي

bijective

injective متباين — Surjective غامر

* لتكن S_X أسرة كل التطبيقات المتقابلة على المجموعة X
* إنّ تركيب التطبيقات يعرف قانون تشكيل داخلي على S_X ،
عندما تكون $X=\{1,\dots,n\}$ نقول إنّ S_X هي أسرة التباديل ويرمز لها عادةً بالرمز S_n
إنّ S_n مع تركيب التباديل تبرّر زمرة الحياد فيها هو التبديل الطابق لـ e الذي يحقق
$e(i)=i \quad ; \forall i \in X=\{1,\dots,n\}$
والنظير الكل عنصر $f \in S_n$ هو مقلوبه
* إذا كان $\alpha \in S_n$ فإنّ

$$\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_{(1)} & \alpha_{(2)} & \dots & \alpha_{(n)} \end{pmatrix}$$

مثال (1) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال (2) :

الزمرة $Gl(n,R)$ ترمز إلى مجموعة المصفوفات من القياس $n \times n$ القابلة للقلب (محددها لا يساوي الصفر)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين $GL(n,R)$ زمرة بـ عملية جداء المصفوفات
الحيادي فيها هو I_n
وتقلوب أي مصفوفة هو نظيرها وهي زمرة غير تبديلية

* $SL(n,R)$ أيضاً زمرة المصفوفات المربعة ذات القياس $n \times n$ والتي محددها يساوي الواحد.
أيضاً $SL(n,R)$ تعرف زمرة بـ عملية ضرب المصفوفات الألوف.
تكتب أحياناً $GL_n(\mathbb{R})$ & $SL_n(\mathbb{R})$

أمثلة هامة:
لتكن X مجموعة و $P(X)$ زمرة كل المجموعات الجزئية من X
[The power of the Set X]
نعرف على $P(X)$ العملية $A \Delta B$ بالشكل:
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
وتعرف بالفرق التناظري (Symmetric Difference)
إن $P(X)$ مع Δ تشكل زمرة والحيادي فيها هو ϕ
ونظير كل عنصر هو نفسه.

تعريف: الزمرة $(G, *)$ زمرة آبلية (Abilion Group)
إذا كان تابع التشكيل الداخلي فيها تبديلي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* لتكن $C(\mathbb{R})$ مجموعة التوابع الحقيقية المستمرة على $\mathbb{R}$ و $D(\mathbb{R})$ مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للتفاضل على $\mathbb{R}$
إنّ كلا من المجموعتين $C(\mathbb{R})$ و $D(\mathbb{R})$ يشكل زمرة بالنسبة لعملية جمع التوابع.

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

إنّ المجموعة $\{e, a, b, c\}$ بما تملكه من تشكيل الموضح أعلاه تعرف زمرة كلاين 4
(Klein four group)

* الحلقة: هي مجموعة غير خالية نعرف عليها عمليتان داخليتان (تملكان تشكيل داخليان)

$$(x, y) \longmapsto x + y$$
$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

بحيث تكون الشروط الآتية محققة.

1) $(E, +)$ زمرة تبديلية.
2) $(E, \times)$ شبه زمرة (نصف زمرة)
3) من أجل $x, y, z \in E$ يكون:
$$(y + z)x = yx + zx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* الحقل: هو حلقة بواحدة (يوجد فيها حيادي ضربي 1_F) بحيث يتحقق أن $(F\setminus\{e\}, x)$ هي زمرة أي لكل عنصر من F مغاير لحيادي الجمع نظير ضربي

$$\forall x \in F \setminus \{e\}, \exists x^{-1} : x x^{-1} = x^{-1} x = e$$

* يوجد نوع آخر من التطبيقات $f \times E \longrightarrow E$ حيث f و E مجموعتان غير خاليتان يرمز عادةً لمثل هذا التطبيق بالرمز:

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x \quad ; \quad x \in E \ \& \ \lambda \in f$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة