كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المتغير العشوائي والمتغير العشوائي المتصل وبعض التوزيعات الاحتمالية الهامة:

تعد المتغيرات العشوائية وسيلة أكثر عملية لدراسة التجارب وتحديد احتمالات وقوع الأحداث بفضاء عينة ما وذلك نظراً لكفاءة وسهولة التعامل مع المتغير العشوائي باعتبار أنه يتعامل مع نتائج التجارب كمقادير عددية حتى ولو كانت هذه النتائج نوعية بطبيعتها.

تعريف:

المتغير العشوائي هو دالة X معرفة بالشكل $X: S \to \mathbb{R}$

مثال: X متغير عشوائي يدل على مربع مجموع الوجهين الظاهرين عند رمي حجري نرد معاً، أوجد قيم المتغير العشوائي:

الحل:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1)\ (1,2)\ (1,3) \dots (1,6) \\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3) \dots (2,6) \\ \vdots \\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3) \dots (6,6) \end{Bmatrix}$$

$X(S) = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144\}$

* لو كانت مربع مجموع العددين يساوي 25 أي $x = 25$

$X(S) = \{(1,4)(4,1)(3,2)(2,3)\} = 25$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

ليكن X متغيراً عشوائياً إنّ التوزيع الاحتمالي لـ X هو دالة f تعرف بالشكل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} p(X=x) ; x \in X(S) \\ 0 \quad ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث: $p(X=x) = p(A) ; X(A) = x , A \subset S$

على سبيل المثال لدينا:

$$p(X=25) = p\{(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)\} = \frac{4}{36}$$

$$f(x) \longmapsto p(\{s \in S : X(s) = x\})$$

* تعريف: نقول أن المتغير العشوائي X متقطعاً أو منفصلاً discrete إذا كان مجموع قيم $X(S)$ مجموعة منتهية أو معدودة.

* إذا كانت f دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل X عندئذٍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحقق $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

مثال: يقفز الضفدع عند خط البداية ببدأ الاحداثيات يقفز على اليمين وعلى اليسار فإذا علمت إنّه يقفز وحدات كاملة في كل مرة يقفز فيها وإنّ نتائج قفزاته في كل مرة هي أحداث مستقلة عشوائياً لا يتأثر وجهة قفزته في كل مرة بوجهة قفزته في مرات أخرى.

X متغير عشوائي يدل على العدد الذي سوف يستقر عليه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الضفدع بعد ثلاث قفزات متتالية، إنّ احتمال أن يقفز إلى اليمين هو $\frac{3}{7}$ واحتمال أن يقفز إلى اليسار هو $\frac{4}{7}$

أوجد قيم المتغير العشوائي وأوجد دالة توزيعة الاحتمالية.

الحل:

★ (نتفق أن $X(s)$ يعبر عنها بـ X اختصاراً وهي تمثل مجموعة قيم المتغير العشوائي).

$$X=\{3, -3, 1, -1\}$$

$$f(3)=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{27}{343}$$

$$f(-3)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{64}{343}$$

$$f(1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{108}{343}$$

$$f(-1)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{144}{343}$$

للتحقق:

$$\sum_{x\in X} f(x)=\frac{27+64+108+144}{343}=1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الهامة:

1. التوزيع المنحط Degcurate distvibution

$f: \mathbb{R} \to [0,1]$

يعرف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x = c \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث: c ثابت من $\mathbb{R}$

2. توزيع برنولي:

إذا كان x متغير عشوائي يتقبل بأحد قيمتين فقط تحل أحدها محل النجاح (الربح) والأخرى تحل محل الفشل (الخسارة) باحتمال قدره θ باحتمال قدره $(1-\theta)$ تكرر التجربة مرة واحدة فقط.

$X = \{0,1\}$

$$f(x) = \begin{cases} \theta & ; x = 1 \\ 1-\theta & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، نربح إذا كان الناتج عدد زوجي و نخسر إذا كانت النتيجة عدد فردي

$X = \{1,0\}$

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{2} & ; x = 1 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3 توزيع ثنائي الحد Binomial Distribution

إذا كان لتجربة ما نتيجتين فقط أحدهما يمثل معنى النجاح باحتمال قدره θ والأخرى تمثل معنى الفشل باحتمال قدره $(1-\theta)$ وقمنا بتكرار التجربة n مرة، X متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات النجاح خلال الـ n تكرار.

علماً أنّ تكرارات التجربة هي حوادث مستقلة إحصائياً

$$f(x)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$X \overset{(تبع)}{\sim} Binomial(\theta)$$

تصبح دالة التوزيع الاحتمالي:

$$f: \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$f(x)=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$X=\{0,1,2,\dots,n\}$$

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، احسب احتمال أن يظهر الرأس H مرة واحدة على الأقل.

الحل:

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$$\theta=\frac{1}{2} \quad , \quad n=3$$

$$f(1)+f(2)+f(3)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+$$

$$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=___$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4 التوزيع الهندسي: Geometric Distribution

نقول أن المتغير العشوائي المتفصل X يتبع توزيعاً هندسياً إذا كان X يمثل عدد مرات الفشل حتى الوصول إلى أول نجاح وذلك عند تكرار تجربة لها أحد النتيجتين الأولى تمثل فشل النجاح باحتمال وقدره α والثانية تمثل الفشل باحتمال بامتمال وقدره $1-\alpha$

$0 < \alpha < 1$

$f(x) = (1-\alpha)^x \alpha \quad ; x \in \{0,1,\dots\}$

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود، احسب احتمال أن نحصل على الزيل عند الرمية الخامسة.

$x = 4$

$f(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)$

5 التوزيع ثنائي الحد السالب:

نقول عن متغير عشوائي أنه يتبع توزيع ثنائي الحد السالب إذا كان X يعبر عن عدد مرات الفشل حتى الوصول على أول r نجاح، احتمال النجاح هو كل تكرار α وبالتالي احتمال الفشل $1-\alpha$ والتكرارات مستقلة احتمالياً.

$$f(x) = \binom{r-1+x}{r-1} (1-\alpha)^x \alpha^{r-1} \alpha$$

$$f(x) = \binom{r-1+x}{r-1} (1-\alpha)^x \alpha^r \quad , x \in \{0,1,\dots\}$$

$X \sim Geometric(r, \alpha)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: في تجربة رمي حطة نقود احسب احتمال أن نحصل على 4 رؤوس قبل الحصول على الذيل الثالث.

6 توزيع بواسون:

نقول عن متغير عشوائي متقطع إنه يتبع لتوزيع بواسون ونكتب $X \sim poisson(\lambda)$ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له معطاة بالشكل:

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad ; x \in \{0,1,\dots\}$$

تحقق أن f دالة توزيع احتمالي: $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ ؟

نعلم أن $\sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$ وبالتالي:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة