كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الفضاء الاحتمالي:

يتكون الفضاء الاحتمالي من فضاء العينة S وهو مجموعة النتائج الممكنة لتجربة ما والأحداث التي هي مجموعات جزئية من فضاء العينة إضافة إلى دالة الاحتمال (مقياس الاحتمال) probability measure حيث يتم ربط كل حدث باحتمال وقوعه $P(A)$

وفق دالة الاحتمال الخواص الآتية:

① $0 \leq P(A) \leq 1$ لكل $A \subset S$

② $P(\phi) = 0$

$P(S) = 1$

③ إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ متتالية من الأحداث المنفصلة (التي لا يمكن أن تقع معاً بسبب أن تقاطع مجموعاتها هو المجموعة الخالية):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

* بالاعتماد على خواص الفضاء الاحتمالي يمكن التوصل إلى النتائج التالية:

(1) $A^c = \{S \in S : S \notin A\}$ متمم الحدث A هو A^c

① $A \setminus B = A \cap B^c = \{s \in S : (s \in A) \wedge (s \notin B)\}$

② $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

③ A, A^c حادثتان متنافيتان $A \cup A^c = S$

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$\Rightarrow \boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$

مبرهنة:

إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots$ تجزئة لفضاء العينة S أي أن:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = S$ & $A_i \cap A_j = \phi$; $i \neq j$

عندئذٍ:

① لأجل أي حدث $B \subset S$ لدينا:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots$

الإثبات:

$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$

$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots$

ولكن $(B \cap A_i)$ و $(B \cap A_j)$ هي أحداث متنافية عندما $i \neq j$

إذاً:

$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots]$

$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots$

② إذا كان $A \supset B$ فإنّ:

$P(A) = P(B) + P(A \cap B^c)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الإثبات:

$$P(A) = P[B \cup (A \cap B^c)] = P(B) + P(A \cap B^c)$$

(3) $A \supset B$ فإن $P(A) \geq P(B)$

بسبب (2) وكون قيمة دالة الاحتمال مقدار غير سالب

(4) يمكن أن نستنتج أيضاً:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(B)$$

مبرهنة:

إذا كان A, B حدثان في تجربة فضاء العينة لها هو S عندئذٍ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الإثبات:

$$(A \cup B) = P(A \setminus B) \cup P(A \cap B) \cup P(B \setminus A)$$

الأحداث السابقة هي أحداث منفصلة:

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

* نتج: إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ متتالية من الأحداث

عندئذٍ:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف:

عندما يكون الفضاء الاحتمالي S يساوي الاحتمالات (احتمالات أحداثه الابتدائية متساوية) عندئذٍ إن احتمال أي حدث ابتدائي هو $\frac{1}{|S|}$ وإذا كان $A \subseteq S$ حدث ما فإنّ:

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

ملاحظة: مما سبق تعاملنا بقيم منتهية ومنقطعة في هذه الحالة نقول إنّ الفضاء الاحتمالي منتظم.

* إذا كانت لدينا مجموعة عدد عناصرها n فإنّ عدد المجموعات الجزئية منها والتي عدد عناصرها k هو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

إنّ إثبات ما سبق يعتمد على المبدأ الأساسي للعد.

تعريف:

إن الاحتمال الشرطي لحدث A في فضاء احتمالي متناهي الاحتمالات هو احتمال وقوع حدث ما A علماً أن B قد وقع بالفعل

$$p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية Pay's:

$$p(A|B) = \frac{P(A)}{p(B)}\, p(B|A)$$

إذا كان A, B متلازمان عشوائياً أي $p(A|B) = p(A)$

بالتالي: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

استمرارية دالة الاحتمال:

نفرض أنّ $A_1, A_2, \ldots$ مجموعة من الأحداث التي تقترب بمعنى أو بآخر من حدث A هل يمكن أن نربط بين احتمالاتها $p(A_1), p(A_2), \ldots$ وبين احتمال A ؟

إن الخاصية التي تعبر عن احتمال اقتراب $p(A_n)$ من $p(A)$ مع اقتراب A_n من A تسمى خاصية الاستمرارية

لذلك السؤال المطروح هنا هو: هل تتمتع مثلاً دالة الاحتمال p بخاصية الاستمرارية؟

تعريف:

(1) نقول عن متتالية الأحداث $A_1, A_2, \ldots$ بأنها تتقارب بالتزايد من A ونكتب $\{A_n\} \nearrow A$ إذا تحقق:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \quad *$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \quad *$$

مثال: $A_n = \left(\frac{1}{n}, n\right]$

تتقارب من $A = (0, \infty)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) نقول بأنّ متتالية الأحداث $\{A_n\}$ تتقارب بالتناقص من A ونكتب: $\{A_n\} \searrow \{A\}$ إذا تحقق:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \quad (*)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \quad (**)$$

مثلاً: $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ تتقارب من $A = \{0\}$

مبرهنة:

نفرض أنّ $A_1, A_2, \ldots$ أحداثاً في فضاء احتمالي ما $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ونفرض أنّ $\{A_n\} \searrow \{A\}$ أو $\{A_n\} \nearrow \{A\}$ عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

الإثبات: بداية نفرض أنّ $\{A_n\} \nearrow \{A\}$ عندئذٍ يمكن أن نكتب:

$$A = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap A_2^c) \cup \cdots$$

إنّ الأحداث $A_i \cap A_{i-1}^c$ هي أحداث متنافية وبالتالي:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) + P(A_3 \cap A_2^c) + \cdots$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = \lim_{n\to\infty} \left[P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) + \cdots\right]$$

ولكن:

$$P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) + \cdots + P(A_n \cap A_{n-1}^c) = P(A_n)$$

$$\Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z