كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تذكرة:

المعادلة التفاضلية الجزئية: هي معادلة تحوي على تابع ومتحولات مستقلة (اثنان على الأقل) بحيث تحقق الجزئية للتابع بالنسبة للمتحولات المستقلة.

مثال $U_t + U_{xx} = 0$

ملاحظة: إذا كان عدد المتحولات المستقلة واحد فقط فإن المعادلة ستكون معادلة تفاضلية عادية.

معظم الظواهر الفيزيائية سوى إن كانت في الميكانيك، الصوتيات أو سريان الحرارة يمكن أن تتمذج بصورة عامة معادلات تفاضلية جزئية.

partial differential equation

* أمثلة عن المعادلات التفاضلية الجزئية:

1- معادلة التوصيل الحراري في البعد الواحد $U_t = U_{xx}$

2- معادلة التوصيل الحراري في البعدين: $U_t = U_{xx} + U_{yy}$

3- معادلة لابلاس $U_{xx} + U_{yy} = 0$ أو $\Delta U = 0$

4- معادلة الإرسال البرقي $U_{tt} = U_{xx} + \alpha U_t + \beta U$

(حيث U التابع، x, y, t المتحولات المستقلة)

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية

تصنف المعادلات التفاضلية الجزئية بناءً على اعتبارات عدة وهذا التصنيف لا يدلنا على طرق الحل التي تطبق على معادلة من صنف معين يمكن أن تطبق على معادلة أخرى من نفس الصنف.

تصنف معادلة ما بالي:

(1) رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية (order): هي رتبة أعلى مشتقة جزئية في المعادلة.

$U_t = U_{xx}$ مرتبة ثانية.

$U_t = U_{xxx} + U_{xxx} + \sin x$ مرتبة ثالثة

(2) عدد المتغيرات المستقلة:

$U_t = U_{xx}$ متغيران x, t

$U_t = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}$ ثلاث متغيرات t, r, θ

(3) الخطية:

a- تسمى المعادلة التفاضلية جزئية خطية (linear partial differential equation) إذا كان المتغير التابع U وجميع مشتقاته تظهر بصورة خطية أي أنه أمثالها في المعادلة تكون تابعة فقط للمتغيرات المستقلة $(t, x, y, \ldots)$

مثال 1- المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى

$$A(x,y)U_x + B(x,y)U_y + C(x,y)U = D(x,y)$$

U: متغير تابع

x, y: متغيرات مستقلة

A, B, C, D: توابع لـ x, y

مثال 2: المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية:

$A(x,y)U_{xx} + B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + D(x,y)U_x + E(x,y)U_y + F(x,y)U = G(x,y)$

b- تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية شبه خطية (quasi linear partial differential equation) إذا كانت خطية بالنسبة لأعلى مشتق تحوية المعادلة بغض النظر عن (خطية المشتقات من مرتبة أقل درجة أعلى مشتق يكون واحد)

مثال 1- المعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية من المرتبة الأولى

$A(x,y,u)U_x + B(x,y,u)U_y = C(x,y,u)$

مثال 2- المعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية من المرتبة الثانية:

$A(x,y,u,U_x,U_y)U_{xx} + B(x,y,u,U_x,U_y)U_{xy} + C(x,y,u,U_x,U_y)U_{yy} = D(x,y,u,U_x,U_y)$

c- تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية نصف خطية: (semi linear partial differential equation)

إذا كانت شبه خطية أمثلة أعلى شتى في المعادلة يكون تابع للمتغيرات المستقلة.

مثال 1: المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية من المرتبة الأولى:

$A(x,y)U_x + B(x,y)U_y = C(x,y,u)$

مثال 2: المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية من المرتبة الثانية:

$A(x,y)U_{xx} + B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} = D(x,y,u,U_x,U_y)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية غير خطية (nonlinear partial differential equation) إذا كانت خطية

* ملاحظة: المعادلة نعرف الخطية وشبه الخطية هي معادلات خاصة من المعادلات التفاضلية غير الخطية

النمذجة الرياضية

كما في حالة المعادلات التفاضلية العادية فإن أغلب المسائل الحقيقية تتطلب الأمر لإيجاد معادلات تفاضلية جزئية، أي يوجد مسألة ما في الفيزياء أو الهندسة أو ...

نبدأ في بناء نموذج رياضي يمثل بصورة جيدة الحالة الفيزيائية وذلك من خلال إيجاد العلاقة بين المتغيرات الناظمة للمسألة وتحديد الشروط اللازمة (شروط ابتدائية وشروط حدية وشروط حدية ابتدائية) وبعد ذلك نصوغ المسألة رياضياً فتتشكل المسألة قيم ابتدائية إذا حصلت على معادلة تفاضلية بشروط ابتدائية.

أو مسألة قيم حدية إذا حصلت على معادلة تفاضلية بشروط حدية أو مسألة قيم ابتدائية حدية إذا حصلت في معادلة تفاضلية بشروط ابتدائية وشروط حدية.

بعد صياغة المسألة رياضياً نبحث فيما إذا كان الحل موجود أم لا (يوجد طرق ونظريات لإثبات وجود الحل)

إذا كان الحل موجود فهو وحيد

إذا كان الحل موجود ووحيد فأوجد هذا الحل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

علينا كتابة حل واحد يحقق المعادلة وتتفق مع التجربة أو الرصد وإلا فإنه علينا تبديل المعادلات.

النمذجة: هي عملية استنتاج المعادلة التفاضلية التي تصف الحالة الفيزيائية وتزويدها بالشروط اللازمة.

حلول المعادلة التفاضلية الجزئية:

1- الحل العام: هو الصيغة التي تعبر عن جميع الحلول لمعادلة تفاضلية جزئية ويكون الحل العام لمعادلة تفاضلية جزئية من المرتبة n حلاً لهذه المعادلة يحوي n من الدوال الاختيارية.

2- الحل الخاص: هو حل يستنتج من صيغة الحل العام باختيارات خاصة للدوال الاختيارية.

$U_{xy} = 0$ معادلة تفاضلية جزئية

$U_x = f(x)$

$U = f(x) + g(y)$

حيث (f, g) دوال اختيارية

3- الحل القوي: هو حل مستمر وقابل للاشتقاق ومشتقاته جميعها مستمرة.

في بعض الأحيان في المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية يوجد حلول لا تتطلب أن تكون نظامية أي ومشتقاته جميعها مستمرة ولا تحقق شروط الاستمرارية لا مشتقات) مثل هذه الحلول تسمى حلول ذو ضعيفة أو سمة.

* الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية هو عبارة عن مجموع حلين الحل العام للمعادلة المتجانسة والحل الخاص لنفس المتجانسة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فيزيائياً يمكن أن نفسر الحل الخاص لغير المتجانسة بأنه رد فعل الكلية على القوى الخارجية المطبقة، والحل المتجانسة يمثل داخل الكلية (بدون قوى خارجية)، والحل العام يكون حالة الجسم بين الخارج والداخل.

طرق حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

رأينا في المعادلات (2) كيفية حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية وسنتعرف هنا على طرائق أخرى، حيث أنه هنالك طرق كثيرة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المطبقة عالمياً، سأعطيها عالمياً تلك الطرق التي تحول المعادلات التفاضلية الجزئية إلى عادية ومنها الطرق التالية:

أ- فصل المتغيرات: يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى عدة معادلات تفاضلية عادية بعدد المتغيرات المستقلة.

ب- التحويلات التكاملية: بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية التي لها m متغير مستقل إلى معادلة تفاضلية جزئية لها m-1 متحول مستقل وهكذا...

ومن ثم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتحولين المستقلين إلى معادلة تفاضلية عادية.

ج- الطرائق العددية: تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى مجموعة من المعادلات الفروقية التي يمكن حلها بعمليات حسابية متكررة بواسطة الحاسب وفي عدد من الحالات يكون هو الحل الوحيد الممكن، وهذه الطريقة تدرس في مقرر التحليل العددي.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية
بمتحولين مستقلين:

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G \quad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G توابع مستمرة تابعة
للمتحولين x, y فقط.

تصنف المعادلة (1) حسب:

1- الخاصة: تكون المعادلة (1) خاصة إذا كان homogen
$G(x,y) = 0$

وتسمى غير متجانسة non homogen إذا كان $G(x,y) \neq 0$

2- أنواع المعاملات (الأمثال): إذا كانت A, B, C, D, E, F
في المعادلة (1) ثوابت فإن المعادلة (1) تسمى معادلة تفاضلية
جزئية خطية ذات أمثال ثابتة

وإذا كان على الأقل الأمثال تابع لـ x أو y أو كليهما تسمى
معادلة ذات أمثال متغيرة.

3- الأنواع الثلاثة الأساسية:

a- النوع المكافئ parabolic:
إذا كان $B^2 - 4AC = 0$

b- النوع الزائدي Hyperabolic:
إذا كان $B^2 - 4AC > 0$

c- النوع الناقصي Elliptic:
إذا كان $B^2 - 4AC < 0$

أمثلة: (1) $U_t = U_{xx}$

$A=1 \quad B=0 \quad C=0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0$
معادلة مكافئية تكافؤية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) $U_{tt} = U_{xx}$

$A=1 \quad B=0 \quad C=-1$

$B^2-4Ac > 0$ معادلة زائدية

(3) $U_{xy} = 0$

$A=0 \quad B=1 \quad C=0$

معادلة زائدية

(4) $\alpha U_{xx} + U_{yy} = 0$

$A=\alpha \quad B=0 \quad C=1$

$B^2-4Ac = -4\alpha$

إذا كان $\alpha > 0$ فالمعادلة ناقصية.

$\alpha = 0$ تكافؤية.

$\alpha < 0$ زائدية.

* B^2-4Ac هو دالة يدعى المحولات المستقلة، لذلك فإن المعادلة تتغير من نوع ليتغير من نقطة لأخرى تبعاً للمحولات المستقلة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z