كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ملاحظة:

فقط عند إعطاء n قيمة $\lim\left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right) < 1$

~~لأنها عند الحصر~~

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأنها متباعدة

$(-1)^n \times (-2)^n = (-1\times -2)^n = 2^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

تذكرة:

ندعو المتتاليتين متجاورتين إذا كانت جهة الإطراد لهما مختلفة (إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة) ونهاية الفرق بينهما يساوي صفر.

تعريف المتتالية اللامتناهية في الصفر:

كل متتالية متقاربة منه الصفر ندعوها متتالية لامتناهية في الصفر تحقق الشرط: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 ; n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

مثال:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 ; n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ الشرط يحقق $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

مثال:

$U_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$U_n = \frac{2+(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0$

- تعريف المتتالية اللامتناهية في الكبر:

- نرتبط الـ $+\infty$ موجبة.

1) اللامتناهية في الكبر موجبة.

2) اللامتناهية في الكبر سالبة

إذا تحقق الشرط

$\exists n ; n > n_0$

$\forall M \in \mathbb{R} : a_n > M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = \infty$

تكون موجبة واللامتناهية في الكبر.

وإذا تحقق الشرط:

$\exists n ; n > n_0 \quad \forall m \in \mathbb{R} ; a_n < m$

$\lim_{n\to\infty} = -\infty$

تكون سالبة واللامتناهية في الصفر.

تمرين: المتتالية $a_n = n^2 - 2n + 4$ أثبت أنها متتالية اللامتناهية في الكبر وموجبة.

$\forall M > 0 \Rightarrow a_n > M$

$n^2 - 2n + 4 > M$

$n^2 - 2n + 4 - M > 0$

$n^2 - 2n + 4 - M = 0$

حساب Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 4(1)(4-M)$

$\Delta = 4 - 16 + 4M = -12 + 4M = 4(M-3)$

1) $\Delta < 0 \Rightarrow M - 3 < 0 \Rightarrow M < 3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- $\Delta = 0 \Rightarrow M-3 = 0 \Rightarrow n = -\frac{b}{2a} = 1$

$n_0 = 1$ وجد

3) $\Delta > 0 \Rightarrow M-3 > 0 \Rightarrow M > 3$

$$n = \frac{2 + \sqrt{4(M-3)}}{2} = 1 + \sqrt{M-3}$$

$n = 1 + \sqrt{m-3}$

$n_0 = 1 + \sqrt{M-3}$ وجد

المتراجحة محققة.

مبرهنة: إذا كانت المتتالية a_n ذات حدود موجبة ومتقاربة من العدد a عندئذٍ نهاية الجذر النوني لـ a_n تساوي الجذر النوني لـ a مثل (الجذر التربيعي والجذر التكعيبي) ويكون نهاية الجذر النوني لـ a هو 1.

مثال: المتتالية $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ هي متتالية متقاربة من العدد النيبري وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1$$

مبرهنة: إذا كانت a_n متتالية تحقق الشرط التالي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad , \quad n > n_0$$

عندئذٍ المتتالية a_n المتناهية في الصفر.

مثال: لدينا $a_n = \frac{n^{10}}{2^n}$ تحقق أن a_n المتناهية في الصفر

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{10}} = \frac{(n+1)^{10}}{2n^{10}} = (1+\frac{1}{n})^{10} \times \frac{1}{2}$$

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ المتتالية a_n المتناهية في الصفر

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المتسلسلات العددية:

$a_n = \{a_0, a_1, a_n, \dots, a_n, a_{n+p}, \dots\}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ يدعى المجموع اللانهائي (متسلسلة عددية)

مثال:

$U_n = 2n-1 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

$U_n = 2^n$

$S_n = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = -1(1-2^n)$

لدراسة تقارب نمط المتتالية

a_0

$a_0 + a_1$

$a_0 + a_1 + a_2$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

وندعو المتتالية (S_n) متتالية المجاميع الجزئية فإذا كانت متقاربة منه عندما $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ فإنه متسلسلة مجموعها a

$\sum_{n=0}^{\infty} a$

نقول عنها متقاربة

المتسلسلة الهندسية: $\sum_{n=0}^{\infty} a.q^n$

نوجد متتالية المجاميع الجزئية (S_n) وهي

$S_n = a_1 + a.q + \dots + a.q^n = a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1- إذا كانت $|q|<1$ فإن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$ وتكون المتسلسلة متقاربة

2- إذا كانت $q>1$ فإن المتتالية متباعدة والمتسلسلة متباعدة

3- $q=1$

$S_n = a+a+a+\dots+(n+1)a$

وهي متتالية متباعدة

4- $q<-1$ ليس لها نهاية محددة ونقول أنها متباعدة

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

نوجد متتالية المجاميع الجزئية

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ ومنه المتسلسلة متقاربة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $\sum \frac{1}{n!}$ سلسلة متقاربة حسب المعيار النسبي.

مبرهنة:

الشرط اللازم لتكون المتسلسلة متقاربة هو أن يكون حدّها العام يسعى إلى الصفر ولكنه إذا كان حدّها العام يسعى للصفر ليس بالضرورة أن تكون متقاربة فالشرط اللازم وليس كافي ولكنه إذا كانت المتسلسلة متقاربة فحتماً زاي حدّها العام صفر.

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$S_n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

نتيجة:

إذا كانت نطية a_n عندما $n \to \infty$ لا تساوي صفر فإنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السلاسل متباعدة

ملاحظات

1) إذا جمعنا متسلسلتين متقاربتين نحصل على متسلسلة متقاربة ونكتب

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

مثال:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n + a_0 + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

$$b_0 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n)$$

2) إذا ضربنا سلسلة متقاربة بعدد تبقى متقاربة بالشكل

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ متقاربة من a وكانت $\lambda \neq a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a.$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة