كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1) لتكن A و B مجموعتان كيفيتان من نقاط فضاء تبولوجي
أثبت صحة العلاقة

① $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

نثبت احتوائين

$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \subset \overline{A}$ } $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$
$B \subset \overline{B}$ }

$\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ هي مجموعة مغلقة لأنها اجتماع لمجموعتين مغلقتين
ومنه باقتطاب تساوي

$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ حسب تعريف الملاصق.

$\forall x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ { إما $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \cap A \neq \varphi$
أو $x \in \overline{B} \Rightarrow \forall V \cap B \neq \varphi \quad \forall V \in \mathcal{V}(x)$

بما أن A و B مجموعتين كيفيتين

$\{ \varphi \neq \forall V \cap A \subset \forall V \cap (A \cup B) \quad \forall V \in \mathcal{V}(x)$
$\varphi \neq \forall V \cap B \subset \forall V \cap (A \cup B)$

ومنه كلا الحالتين نجد أن

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$\emptyset \neq \mathcal{V}_n(A \cup B) \quad \forall \mathcal{V} \in V(n)$

حسب تعريف الالصاقة نبدأ بـ

$x \in \overline{A \cup B}$

ومراعاة الاختيار الكيفي لـ x من $\overline{A \cup B}$ نبدأ

$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ مما سبق نبدأ بـ

2) $E|A \subseteq E|A^\circ$ (نرهن صحة العلاقة)

الاحتواء الأول

$A^\circ \subseteq A$

$E|A^\circ \supseteq E|A$

$E|A^\circ \supseteq E|A$

A° مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ $E|A^\circ$ مجموعة مغلقة ومنه

$\overline{E|A^\circ} = E|A^\circ \Leftarrow$ (I) $\Leftarrow E|A \subseteq E|A^\circ$

الاحتواء الثاني:

$E|A^\circ \subseteq \overline{E|A}$

$E|A \subseteq \overline{E|A} \Rightarrow E|(E|A) \supseteq E|(\overline{E|A})$

$A \supseteq E|(\overline{E|A})$

$A^\circ \supseteq (E|(\overline{E|A}))^\circ$

$E|A$ هي مجموعة مغلقة و $(E|\overline{E|A})$ هي مجموعة مفتوحة لأنها متممة مجموعة مغلقة

$(E|\overline{E|A}) = (E|(\overline{E|A}))^\circ$

$A^\circ \supseteq E|(\overline{E|A}) \Rightarrow E|A^\circ \subseteq \overline{E|A}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة صحة العلاقة:

$$bdA = A \setminus A^\circ$$

الاحتواء الأول

$$bdA \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ$$

$$\forall x \in bdA = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} & x \in \bar{A} \\ \text{أو} & x \in E \setminus A = E \setminus A^\circ \end{cases}$$

$$x \in \bar{A} \setminus A^\circ$$

مع مراعاة الاختيار الكيفي لـ x نجد أن bdA

$$\boxed{bdA \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ} \quad (I)$$

الاحتواء الثاني:

$$\bar{A} \setminus A^\circ \subseteq bdA$$

$$\forall x \in \bar{A} \setminus A^\circ \Rightarrow \begin{cases} x \in \bar{A} \\ x \notin A^\circ \Rightarrow x \in E \setminus A^\circ = E \setminus A \end{cases}$$

نجد أن $x \in \bar{A}$ و $x \in \overline{E \setminus A}$

$$x \in \bar{A} \cup \overline{E \setminus A} = bd(A)$$

مع مراعاة الاختيار الكيفي لـ x نجد أن $A \setminus A^\circ$ الاحتواء محققة

$$\boxed{A \setminus A^\circ \subseteq bd(A)} \quad II$$

من I و II نجد $bdA = A \setminus A^\circ$

التمرين الثاني: نعرّف على المجموعة $E = \{1,2,3,4,\dots,11,12\}$ التبولوجيا τ على الشكل التالي

$$\tau = \{E, \Phi, \{1,3,5,7,9,11\}, \{2,4,6,8,10,12\}\}$$

ونأخذ المجموعة $A = \{4,8,11\}$ و $B = \{3,7\}$ $C = \{1,2,5,10\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1. أوجد A° ، B° ، C° ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $\overline{C}$ ، bdA ، bdB ، bdC ، A' ، B' ، C' ، IsA ، IsB ، IsC

~~A°~~

الحل:

A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.

$A^\circ = \varphi$ ، $B^\circ = \varphi$ ، $C^\circ = \varphi$.

$\tau = \{\varphi, E, \{2,4,6,8,10,12\}, \{1,3,5,7,9,11\}\}$

$\overline{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

$\overline{A} = E$

$\overline{B} = \{1,3,5,7,9,11\}$ ، $\overline{C} = E$.

$bdA = \overline{A} \setminus A^\circ = E \setminus \varphi = E$.

$bdB = \overline{B} \setminus B^\circ = \{1,5,7,9,11\} \setminus \varphi = \{1,5,7,9,11\}$

$bdC = \overline{C} \setminus C^\circ = E \setminus \varphi = E$.

A':

$A' = A' \cup A$

$E = A' \cup \{4,8,11\} = \{1,2,3,5,6,7,9,10,12\} \subseteq A'$

نبحث عن نقاط المجموعة A

من أجل $x = 4$

$\forall \ell \in V(4) : \{\ell \in P(E), \{2,4,6,8,10,12\} \subseteq \ell\}$

$\ell \cap A \neq \varphi$ ، $\{4\} \longrightarrow 4 \in A' \longrightarrow 4 \notin IsA$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من أجل $x=8$

$\forall \ell \in V(8) = \{ \ell \in P(E) ; \{2,4,6,8,10,12\} \subseteq \ell \}$

$\ell \cap A \neq \varphi \ , \{8\}$

$\Rightarrow 8 \notin ISA$.

من اجل $x=1$

$\forall \ell \in V(1) = \{ \ell \in P(E) ; \{1,3,5,7,9,11\} \subseteq \ell \}$

$\ell \cap A = \{11\} \Rightarrow 11 \in A' \Rightarrow 11 \in ISA$

$A' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12\}$ ، $ISA = \{11\}$

ك و ك' بنفس الطريقة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة