كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ملاحظة: من تعريف النقطة اللاصقة لمجموعة ونقطة التراكم نستنتج أن كل نقطة تراكم هي نقطة لاصقة ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة

مبرهنة (دورة):

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التوبولوجي (E,T) عندئذٍ تتحقق المساواة

$\overline{A} = A' \cup A$

البرهان: لدينا $A \subset \overline{A}$ علاقة محققة دوماً

$B \subset \overline{B}$ علاقة محققة دوماً $\forall B$

$A \cup A' \subset \overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A} \Rightarrow \boxed{A \cup A' \subset \overline{A}}$ ...(1)

من جهة ثانية: نفرض أن $x \in \overline{A}$ نقطة كيفية ولنبرهن أنها تنتمي لـ $A \cup A'$

بما أن $x \in \overline{A}$ فإن $x \in A'$ بالتالي $x \in E$ نميز حالتين:

$x \in A$ أو $x \in E$

$x \in E \subset x \in A$

$\forall N \cap (x) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A \subset x \in E \cap A$

وبما أنّ $x \in \bar{A}$ ...

أي منه * و * * نجد أنّ $x \notin A'$ بالتالي $x \in A \cup A'$

من الحالتين نجد أنّ $x \in A \cup A'$ وبما أنّ x كيفية

$$\bar{A} \subset A \cup A' \quad \blacksquare$$

من علاقتي الاحتواء 1 و 2 نجد أنّ

$$\bar{A} = A' \cup A$$

مبرهنة: لتكن A مجموعة كيفية من فضاء التبولوجي (E,T) ولتكن $\{F_i : i \in I\}$ أسرة جميع المجموعات المغلقة في (E,T) والتي تحقق العلاقة

$$A \subset F_i \quad \forall i \in I$$

عندئذٍ يكون

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$$

نتائج وملاحظات:

1) من المبرهنة السابقة وبسبب كون الصاق أي مجموعة هي تقاطع مجموعات مغلقة في (E,T) وكون تقاطع مجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة بالتالي الصاق مجموعة مغلقة في (E,T)

2) من نتيجة المبرهنة السابقة

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i \; ; \; F_i \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \subset F_i \; , \; \forall i \in I$$

وبسبب خواص التقاطع لدينا

$$\bigcap_{i \in I} F_i \subset F_i \quad \forall i \in I.$$

لذلك فإنّ الصاق أي مجموعة A هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A في (E,T)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) إذا كانت مجموعة A كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,T) عندئذٍ تكون المجموعة A مغلقة في (E,T) إذا وفقط إذا كانت $A=\bar{A}$

الملاصق: هي تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحوي A

تعريف:

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,T) ولتكن $x\in E$ نقطة مفروضة

1) يقال عن x أنها نقطة جبسية لـ A إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$\forall U\cap A\neq\varphi$

$\forall U\cap(E\setminus A)\neq\varphi \quad \forall U\in V(x)$

- تسمى جميع النقاط الجبسية لـ A بجبسية المجموعة A ويرمز لها بالرمز bdA.

2) يقال عن x أنها نقطة منزلة للمجموعة A إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\exists U_0\in V(x)\ ;\ U_0\cap A=\{x\}$

تسمى مجموعة جميع النقاط المنزلة لـ A بمنزلة A ويرمز لها بالرمز IsA

نتائج وملاحظات:

1) من تعريف النقطة الجبسية والنقطة اللاصقة لمجموعة في الفضاء التبولوجي (E,T) نجد أنه

$bdA=\bar{A}\cap(E\setminus A)$

وبما أن الملاصق أي مجموعة في (E,T) هي مجموعة مغلقة وكذلك تقاطع مجموعتين مغلقتين هو مجموعة مغلقة ونجد أن bdA مجموعة مغلقة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3- منه تعريف النقطة المنفردة لمجموعة A نجد أنه أياً كانت $x \in ISA$ فإنه يوجد مجاورة $\mathcal{V}_x$ لـ x بحيث يكون $\mathcal{V}_x \cap A = \{x\}$

وبما أنه $\mathcal{V}_x \cap A \subset C$ فإنه $\{x\} \subset A$ أي $x \in A$

$ISA \subset A$ محققة دوماً

ملاحظة: $x \in ISA \Rightarrow \exists \mathcal{V}_x \cap A = \{x\} \neq \phi \Rightarrow x \in A$

4- منه تعريف نقطة التراكم والنقطة المنفردة لمجموعة

$ISA \cap A' = \phi$

تمرين: نعرّف على $E = \{1,2,3,4,\dots,10\}$ التوبولوجيا

$T = \{E, \phi, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,6,7\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,6,7\}\}$

لتأخذ المجموعات

$A = \{1,2,3,9\}, B = \{5,8\}, C = \{5,8,9,10\}$.

1- أوجد أسرة جميع المجموعات المغلقة من (E,T)

2- جد $A^\circ, \bar{A}, eXA, A', \mathcal{V}(A), bdA, \bar{B}, B^\circ$

$\bar{C}, C^\circ, bdB, B', ISB, eXB, \mathcal{V}(\{6,7\}), C', ISC, eXC, bdC$

3- أوجد T_1 توبولوجيا أقوى من T غير التوبولوجيا القوية

وجد T_2 توبولوجيا أضعف من T غير التوبولوجيا الضعيفة

1- $\mathcal{F} = \{E, \phi, \{3,4,\dots,10\}, \{1,2,5,6,7,\dots,10\}, \{3,4,5,8,9,10\}, \{5,6,\dots,10\}, \{5,8,9,10\}\}$

2) A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

$A^\circ = \{1,2\}$

$\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A $\subset$ $\bar{A} = E$

ExA هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة ضمنه $E \setminus A$

$E \setminus A = \{4,5,6,7,8,10\}$

$ExA = \Phi$

لدينا $\bar{A} = A' \cup A$

$\{1,2,3,\dots,10\} = A' \cup \{1,2,3,9\}$

$\Rightarrow \{4,5,6,7,8,10\} \subset A'$

لذلك نبرهن فقط نقاط A.

من أجل $x=1 \Rightarrow V(1) = \{V \in P(E) ; \{1,2\} \in V\}$

المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطة من نقاطها.

$1 \in A' \Rightarrow \forall V \in V(1) ; V \cap A \neq \Phi, \{1\}$

نلاحظ أنه كلما مجاورة تحوي $\{1,2\}$ وكذلك A تحوي $\{1,2\}$

$\{1,2\} \subset V \cap A$.

وبالتالي $V \cap A \neq \Phi, \{1\}$

$\Leftarrow 1 \in Is A \neq 1 \in A'$

من أجل $x=3$

$V(3) = \{V \in P(E) ; \{3,4\} \subset V\}$

$\exists V_0 = \{3,4\} ; V_0 \cap A = \{3\} \Rightarrow 3 \in Is A, 3 \notin A'$

من أجل $x=2$ نجد أنه

$V(2) = \{V \in P(E) ; \{1,2\} \subset V\}$

$\forall V \in V(2) \Rightarrow \{1,2\} \subset V \cap A \Rightarrow V \cap A \neq \Phi, \{2\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$2 \notin IsA$ و $2 \in A'$ أي

من أجل $x=1$ نجد أن

$V(1) = \{V \in P(E) ; E \subseteq V\} = E$

$\Rightarrow E \cap A = A \neq \varphi \Rightarrow \{1\} \Rightarrow 1 \in A'$ و $x \notin IsA$

$A' = \{1, 2, 4, 5, 6, \ldots, 10\}$, $IsA = \{3\}$

$\bar{A} = E$.

$bdA = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$

$\overline{E \setminus A} = (\{4, 5, 6, 7, 8, 10\}) \Rightarrow bdA = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$

$bdA = \bar{A} \setminus A^{\circ}$.

$bdA = \bar{A} \setminus A^{\circ} = E \setminus \{1, 2\} = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$.

$\bar{B} = \{5, 8, 9, 10\}$.

$B^{\circ} = \varphi$

$ExB = (E \setminus B)^{\circ} = (\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10\})^{\circ} = (\{1, 2, 3, 4, 6, 7\})$

$\bar{B} = B' \cup B$

$\{5, 8, 9, 10\} = B' \cup \{5, 8\}$

$\{9, 10\} \subseteq B'$.

$V(5) = \{V \in P(E) ; E \subseteq V\} = E$.

$\forall V \in V(5) \Rightarrow V \cap A \neq \varphi$, $\{5\} \Rightarrow 5 \in B'$ و $5 \notin IsB$

وبنفس الطريقة نجد:

$8 \in B'$ و $8 \notin IsB$.

$\Leftarrow$

$B'' = \{5, 8, 9, 10\}$, $IsB = \varphi$

$bdB = \bar{B} \setminus B^{\circ} = \{5, 8, 9, 10\} \setminus \varphi = \{5, 8, 9, 10\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

C° أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في C $\Leftarrow$ $C^\circ = \phi$

$\overline{C} = C$ كونه C مغلقة $\Leftarrow$

$P \times C = (E \mid C)^\circ = (\{1,2,3,4,6,7\})^\circ$

$P \times C = E \mid C$ كونها مفتوحة

$bdc = \overline{C} \mid C^\circ = C$

$\overline{C} = C' \cup C$

$C = C' \cup C$

$\forall x \in C \Rightarrow V(x) = \{V \in P(E) ; E \subseteq V\} = E.$

$\Rightarrow E \cap C \neq \phi, \{x\} \Rightarrow x \in C' \not\ni x \notin Isc$

$C' = C \Rightarrow Isc = \phi.$

$V(\{6,7\}) = \{V \in P(E) ; \{1,2,6,7\} \subseteq V\}.$

(3

$T_1 = \{E, \phi, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,6,7\}, \{1,2,3,4\}$
$, \{1,2,3,4,6,7\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{3\}, \{2,3,4\},$
$\{1,2,3,6,7\}\}.$

$T_2 = \{E, \phi, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة