كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى (محلولة بالنسبة للمشتق):

الشكل العام لهذا النوع من المعادلات هو $f(x,y,y')=0$

الشكل المعياري (النظامي) $y'=f(x,y)$

الشكل التفاضلي $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

مثال: $yy'+3x^2+x=0$

تكون هذه المعادلة تكتب بالشكل المعياري

$y'=-3x^2-x$

وتكتب هذه المعادلة بالشكل التفاضلي $(3x^2+x)dx+(y)dy=0$

- تنقسم المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى إلى:

1- المعادلة التفاضلية منفصلة المتحولات (المتغيرات).

2- المعادلات التفاضلية التي يمكن أن تتحول إلى منفصلة المتغيرات.

3- المعادلات التفاضلية التامة.

4- المعادلات التفاضلية التي يمكن أن تتحول إلى تامة.

5- المعادلات التفاضلية الخطية

6- المعادلات التفاضلية التي يمكن أن تتحول إلى خطية.

1) المعادلات التفاضلية منفصلة المتغيرات: وهي المعادلات التي تكتب بالشكل

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$$

ويُطلب بإجراء المكاملة مباشرة.

مثال:

$$x^2\,dx + y\,dy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$$

وهو الحل العام للمعادلة.

2) - المعادلات التي يمكنه أن تتحول إلى منفصلة المتغيرات

$$A_1(x)\,A_2(y)\,dx + B_1(x)\,B_2(y)\,dy = 0 \quad \text{(a}$$

نقسم على $A_2(y)\,B_1(x) \neq 0$

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)}\,dx + \frac{B_2(y)}{A_2(y)}\,dy = 0$$

مثال:

$$xy(1+x^2)\,dy - (1+y^2)\,dx = 0$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

نقسم على $x(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = 0$$

بإجراء المكاملة كما درسنا في مادة تحليل 2

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy - \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+y^2| - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| = \ln c$$

$$\ln\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = \ln c^2 \Rightarrow (1+y^2)(1+x^2) = C_1 x^2$$

بمسرفو اللوغاريتم لم نتج الجواب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x=a$ حل حاذ للمعادلة

(b. تكون المعادلة التفاضلية من الشكل $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$

منفصلة المتغيرات أي تكون المتحولات مرتبطة

لحلها نفرض $z=ax+by+c$

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=f(z)$$

مثال: $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

نفرض $z=x+y$

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}-1=z^2$$

$$dz=(1+z^2)dx \Rightarrow \frac{dz}{1+z^2}=dx \Rightarrow \arctan(z)=x+c$$

$$\arctan(x+y)=x+c$$

الحل العام يكون بأخذ الطرفين Tan

$$x+y=\tan(x+c)$$

$$y=\tan(x+c)-x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y\,P(x.y)\,x\,dx + x\,Q(x.y)\,dy = 0$ ..C.C

لحلّها نفرضه $Z = x.y$

$dZ = x\,dy + y\,dx$

مثال:

$y(1-xy)\,dx - x(1+xy)\,dy$

$Z = x.y$

$dZ = x\,dy + y\,dx$

$y = \frac{Z}{x}$

$dy = \frac{x\,dZ - Z\,dx}{x^2}$

$\frac{Z}{x}(1-Z)\,dx - x(1+Z)\left(\frac{x\,dZ - Z\,dx}{x^2}\right) = 0$

$\frac{2Z}{x}\,dx - (1+Z)\,dZ = 0$

$\frac{2\,dx}{x} - \frac{1+Z}{Z}\,dZ = 0$

$2\ln x - \ln|Z| - Z = \ln c$

$\ln\left(\frac{x^2}{Ze^Z}\right) = \ln c$

$x^2 = c\,Z\,e^Z$

$x^2 = c\,x.y.e^{x.y}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

d) المعادلات التفاضلية المتجانسة:

تعريف: نقول عن التابع $f(x,y)$ أنّه متجانس من الدرجة n لـ x,y إذا بدّلنا كل x بـ λx وكلّ y بـ λy حيث λ اختياري وتحققت المطابقة

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n(f(x,y))$$

وذلك من أجل قيم λ.

مثال:

$$f(x,y)=x^3-y^2x$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3x^3-\lambda^2y^2\cdot\lambda x=\lambda^3(x^3-y^2x)$$

$$f(x,y)=\frac{x}{y}\operatorname{Tg}\frac{x}{y}$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x}{\lambda y}\operatorname{Tg}\frac{\lambda x}{\lambda y}=\lambda^0\frac{x}{y}\operatorname{Tg}\frac{x}{y}$$

← درجة التجانس صفر.

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ معادلة متجانسة إذا كانت كلّ من M و N توابع متجانسة من نفس الدرجة أما إذا كانت المعادلة بالشكل $y'=f(x,y)$ فإنّها تكون متجانسة إذا كان f تابع متجانس من الدرجة صفر.

لحلّ المعادلة التفاضلية المتجانسة نفرض $z=\frac{y}{x}$ ←

$$dy=xdz+zdx,\quad y=zx.$$

$$y'=e^{y/x}+\frac{y}{x}.$$

لحلها نفرض $z=\frac{y}{x}$ ← $y=zx$ ← $dy=xdz+zdx$

$$x\frac{dy}{dx}+z=e^z+z\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=e^z\Rightarrow\frac{dz}{e^z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow e^{-z}=\ln x+c$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{y}{x}}=\ln x+c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $(x^2-y^2)dx+2xy\,dy=0$

نفرض $z=\frac{y}{x}$

$dy=x\,dz+z\,dx$

$(x^2-x^2z^2)dx+2x^2z(x\,dz+z\,dx)=0$

$(x^2+x^2z^2)dx+2x^3z\,dz=0$

$x^2(1+z^2)dx+2x^3z\,dz=0$

نقسم على $2(1+z^2)x^3\neq 0$

$\frac{x^2}{x^3}dx+\frac{2z}{1+z^2}dz=0$

$\frac{1}{x}+\frac{2z}{1+z^2}dz=0$

$\ln x+\ln(1+z^2)=\ln c$

$x(1+z^2)=c$

$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=c$

ج. المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية:

لها الشكل:

$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

نراعي حالتين

1) إذا كانت المستقيمات متقاطعة $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$

أي بسبب تحقق الشرط $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

نوجد نقطة التقاطع ولتكن (x_0,y_0) ونجري المعادلة بهذه النقطة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$

$dx = dX$ ، $dy = dY$

بالتعويض في المعادلة يصبح لدينا

$$a_1X + b_1Y + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)dX + (a_2X + b_2Y + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)dY = 0$$

$$(a_1X + b_1X)dX + (a_2X + b_2Y)dy = 0$$

معادلة متجانسة ولحلها نفرض $Z = \frac{Y}{X}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة