كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

٢٠٢٦

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مجموعة الاجزاء الجزئية لمجموعة ما غير خالية:

لتكن Ω مجموعة ما غير خالية ندعو المجموعة المؤلفة من مجموعة جميع المناجير الجزئية من Ω مجموعة أجزاء Ω ونرمز لها بالرمز $P(\Omega)$ ونكتب بشكل رياضي

$$P(\Omega) = \{A ; A \subseteq \Omega\}$$

وبشكل آخر يمكن أن نكتب (A مجموعة جزئية من Ω) $A \subseteq \Omega$ يكافئ $A \in P(\Omega)$

ملاحظة: إذا كان لدينا $a \in \Omega$ عندئذٍ فإن المجموعة المؤلفة من العنصر a محتواة في Ω أي $\{a\} \subseteq \Omega$ والتي أنه $\{a\} \in P(\Omega)$ ولكن $a \notin P(\Omega)$

تعريف تجزئة مجموعة:

لتكن $T = \{A_i\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من مجموعة ما غير خالية A ندعو T تجزئة للمجموعة A إذا حققت الشروط التالية:

1) من أجل أي عنصرين i, j من I فإن إما $A_i = A_j$ أو $A_i \cap A_j = \varphi$

2) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

3) من أجل أي $i \in I$ فإن $A_i \neq \varphi$

ويدعى عناصر T عناصر هذه التجزئة

ملاحظات:

1- إنّ الشرط الأوّل من التعريف السابق يعني أنّ أيّ عنصرين من التجزئة T إمّا متباينان أو منفصلان مثنى مثنى

2- إنّ الأسرة $T=\{A_i\}_{i\in I}$ هي أسرة من المجموعات الجزئية من مجموعة ما غير خالية A ويمكن أن تكون هذه الأسرة منتهية أي عدد عناصر المجموعات A_i منتهٍ عندما تكون مجموعة الأدلة I منتهية أي تكون بالشكل

$T=\{A_i\}_{i\in I}=\{A_1, A_2 \dots A_n\}$;

$I=\{1,2,\dots,n\}$

و $n<\infty$

واحتمال أن تكون هذه الأسرة T غير منتهية وفي هذه الحالة نكتب $T=\{A_i\}_{i\in I}=\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$

أي أنّ الأسرة T غير منتهية إذا كانت مجموعة الأدلة I غير منتهية بمعنى أنّ $I=\{1,2,3,\dots\}$

3- إنّ الأسرة $T=\{A_i\}$ أسرة من المجموعات الجزئية من مجموعة ما غير خالية A تعني أنّ أي عنصر من أسرة T هو مجموعة جزئية من المجموعة A و $A\neq\varnothing$

أي أنّ $T=\{A_i; A_i\subset A\}\in I$

تمرين: لتكن $T=\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة المجموعات الجزئية من مجموعة ما غير خالية A ويدعى T تغطية للمجموعة A إذا كان $A=\bigcup_{i\in I} A_i$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ويدعى T عناصر هذه التغطية

مثاله: لتكن $\Omega = \{4, 7, 12\}$ والمطلوب:

~~1) جد بعض الأمثلة عن المجموعات الجزئية من المجموعة~~

~~Ω~~

1) جد عناصر المجموعة $P(\Omega)$ وما هو عدد عناصرها.

2) جد بعض الأمثلة عن المجموعات الجزئية من المجموعة Ω

3) أوجد تجزئة لـ Ω 4) جد تغطية لـ Ω وهل هذه التغطية متنافية ولماذا؟

الحل:

1) $P(\Omega) = \{\Phi, \{4\}, \{7\}, \{12\}, \{4,7\}, \{4,12\}, \{7,12\}, \{4,7,12\}\}$

نلاحظ أنه $\{12\} \in \Omega$ $\Leftarrow$ $\{12\} \in P(\Omega)$

أيضاً $\{7,12\} \in P(\Omega)$ لأنه $\{7,12\}$ مجموعة جزئية من Ω

لدينا $|P(\Omega)|$ أي عدد عناصر $P(\Omega)$ لدينا قانون:

إذا كانت Ω مجموعة ما غير خالية وكانت $n = |\Omega|$ حيث $n < \infty$ فإن $|P(\Omega)| = 2^{\Omega} = 2^n$ وبالتالي

$|P(\Omega)| = 2^3 = 8$

ملاحظة هامة جداً ومعلومة سابقة:

إن المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة A غير خالية A.

2)

$T_1 = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{\Phi\}, \{4\}, \{7\}\}$

$T_2 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \{\{12\}, \{4,7\}, \{7,12\}, \{12,4\}\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$T_3 = \{A_1, A_2\} = \{\{7\}, \{4,7,12\}\}$

$T_4 = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{4\}, \{7\}, \{12\}\}$

$T_5 = \{A_1, A_2\} = \{\{4\}, \{7,12\}\}$

$T_6 = \{\{\varphi\}, \{4,7,12\}\}$

$T_7 = \{\{\varphi\}, \{4\}, \{7\}, \{12\}, \{4,7\}, \{4,12\}, \{7,12\}, \{4,7,12\}\} = P(\Omega)$

3) إنّه أسرة المجموعات الجزئية $T = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{4\}, \{7\}, \{12\}\}$

تشكّل تجزئة للمجموعة Ω لأنّ

1) جميع عناصر التجزئة منفصلة مثنى مثنى أي

$A_1 \cap A_2 = \varphi$ ، $A_2 \cap A_3 = \varphi$ ، $A_1 \cap A_3 = \varphi$

2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{4\} \cup \{7\} \cup \{12\} = \{4,7,12\} = \Omega$

3) إنّه أيّ عنصر من عناصر التجزئة لا ينتمي إلى المجموعة الخالية أي أنّه:

$A_1 = \{4\} \neq \varphi$ ، $A_2 = \{7\} \neq \varphi$ ، $A_3 = \{12\} \neq \varphi$

وهي تجزئة منتهية لأنّ عدد عناصرها هو 3

كذلك فإنّه:

$T = \{A_1, A_2\} = \{\{4\}, \{7,12\}\}$

تشكل تجزئة للمجموعة Ω وهي تجزئة منتهية

4) إنّه أسرة المجموعات الجزئية من المجموعة Ω وهي $T = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \{\varphi, \{4\}, \{4,7\}, \{7,12\}\}$

تشكل تغطية للمجموعة Ω لأنّه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i = \varphi \cup \{4\} \cup \{4,7\} \cup \{7,12\}$

$= \{4,7,12\} = \Omega$

وهي تجزئة منتهية لأنّ عدد عناصر التجزئة T هو 4

علاقة التكافؤ.

لتكن R علاقة ثنائية معرّفة على مجموعة ما غير خالية A وندعو R علاقة تكافؤ على A إذا كانت R انعكاسية وتناظرية ومتعدية

صفوف التكافؤ.

تعريف صفّ التكافؤ: إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة غير الخالية A و $a \in A$ عندئذٍ نرمز لصفّ تكافؤ العنصر a وفق العلاقة R بالرمز $\bar{a}$ أو $[a]$ ونعرّف بأنّ المجموعة

$\bar{a} = [a] = \{b \in A : aRb\}$.

ونسمي العنصر a ممثلاً للصف a ويمكننا أن ندعو أي عنصر من التكافؤ $\bar{a}$ ممثلاً لهذا الصفّ وتدعو مجموعة جميع صفوف تكافؤ العلاقة R بمجموعة الخارج ونرمز لها بالرمز A/R أي $A/R = \{a : a \in A\}$

مجموعة جميع صفوف تكافؤ العلاقة R المعرّفة على A

نظرية 1: لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A حيث $A \neq \varphi$ و $a, b \in A$ عندئذٍ $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow b \in \bar{a}$

ملاحظة:

إنّ النظرية السابقة تعني:

يمكن لأي عنصر b من صف التكافؤ $\bar{a}$ أن يكون ممثلاً لهذا الصف.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا اشتركا صفّا تكافؤ بعنصر واحد على الأقلّ عندئذٍ فإنّ صفا التكافؤ متساويان.

نظرية 2: لتكن A مجموعة ما غير خالية إذا كانت $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ معرّفة على المجموعة غير الخالية A عندئذٍ مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{R}$ تشكل تجزئة للمجموعة A أي أنّ: $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$

وبالعكس إذا كانت $T = \{T_i\}_{i \in I}$ تجزئة للمجموعة غير الخالية A عندئذٍ هذه التجزئة تعرّف علاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ على المجموعة A بالشكل التالي:

$$\forall a,b \in A : a \mathcal{R} b \Rightarrow \exists T_i \in T \ ; \ a,b \in T_i$$

بحيث أنّ صفوف التكافؤ للعلاقة $\mathcal{R}$ على المجموعة A هي عناصر هذه التجزئة أي أنّ $T = A/\mathcal{R}$

وبما سبق ينتج أنّ أي صفّي تكافؤ للعلاقة $\mathcal{R}$ من هذه التجزئة إما متساويان أو تقاطعهما يساوي الخالية أي منفصلان مثنى مثنى

مثال: علاقة التوافق $\equiv$ على $\mathbb{Z}$ (مثال هام)

حالة خاصة: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على $\mathbb{Z}$ بالشكل التالي.

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow 5 \mid x-y$$

أو بالشكل $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x-y = 5k ; k \in \mathbb{Z}$

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}$$

والمطلوب أثبت أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$ ثمّ جد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان

1- R انعكاسية

R انعكاسية على $\mathbb{Z} \iff \forall x \in \mathbb{Z} : xRx$

ولدينا R انعكاسية لأنّ

$\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5 \mid x-x=0 \iff xRx$

2- R تناظرية

R تناظرية على $\mathbb{Z} \iff$

$\forall x,y \in \mathbb{Z} ; xRy \Rightarrow yRx$

أي R تناظرية لأنّ

$\forall x,y \in \mathbb{Z} ; xRy \Rightarrow 5 \mid x-y \Rightarrow 5 \mid (y-x) \Rightarrow yRx$

3- R متعدية

R متعدية على $\mathbb{Z} \iff$

$\forall x,y,z \in \mathbb{Z} ; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

لدينا: $\forall x,y,z \in \mathbb{R} ; (xRy) \wedge (yRz)$

$\Rightarrow (5 \mid x-y) \wedge (5 \mid y-z) \Rightarrow 5 \mid (x-y)+(y-z) \Rightarrow$

$5 \mid x-z \Rightarrow xRz$

والعلاقة R متعدية

إذاً العلاقة R انعكاسية وتناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة