كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: ادرس اطراد ومحدودية المتتاليات الآتية:

1) $U_n = \left(\frac{3n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$

نفرض f تابع يحقق $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

$D_f = [0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$

$f'(x) = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

f متزايد

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	3

f متزايد على المجال $[0,+\infty[$ متتالية U_n متزايدة

$0 \leq U_n < 3$

2) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{n-1}$

متتالية متناقصة

$\sup U_n = 2$ ، $\inf U_n = 1$

ولو أردنا اثبات انها متناقصة

$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+2}{2n+1} - \frac{2n}{n-1} = \frac{2(n+2)(2n-1) - 2n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} < 0$

المتتاليات متقاربة

التمرين الثاني: أدرس نهاية المتتاليات الآتية:

1) $U_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 1^\infty$ (ح.ع)

لدينا المبرهنة

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\times 2}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$.

2) $U_n = \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^n+\left(\frac{8}{10}\right)^n\right)}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n}\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{9}{10}\right)^n+\left(\frac{8}{10}\right)^n} = 10\times 1 = 10$

3) $U_n = \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{10^n\left(\frac{1}{10^n}+2\right)}{10^n\left(\frac{5}{10^n}+3\right)}$

$\lim_{n\to\infty} = \frac{2}{3}$

$I_n = \sqrt[n]{4n^2+n+5} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\left(4+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} =$

نعلم سابقاً $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\cdot\left(4+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right) = (1)^2\,(4+0+0)^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z