كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

قوانين هامة للمتتاليات الحسابية والهندسية:

المتتالية الحسابية:

$U_n = U_m + (n-m)r$

لبرهن أن المتتالية حسابية $U_{n+1} - U_n$

قانون مجموع عدد متتالية حسابية $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

مثال: $S_n = 1+2+3+\dots+n$

الحل: $S_n = \frac{n}{2}(1+n)$

إذا كانت لدينا a, b, c ثلاث حدود من متتالية حسابية

$b = \frac{a+c}{2}$ ، ~~b = a~~

المتتالية الهندسية:

$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$

قانون مجموع عدد متتالية هندسية

$S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

مثال: $S_1 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2^7)}{1-2} = -\frac{1}{2}(1-128) = \frac{127}{2}$

لدينا ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية: a, b, c

$b^2 = a \cdot c$

كل حدّ هو وسط هندسي بين متجاورين.

تمرين: لتكن لدينا المتتالية المعرّفة بالشكل $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}$; $a_0 \leq 1$ أثبت أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتقاربة وجد نهايتها

البرهان:

$E(n): a_n \leq 1$

من أجل $n=0$ $\Rightarrow a_0 \leq 1$ محققة

نفرض صحّة القضية $E(n)$:

$E(n): a_n \leq 1$

نبرهن صحّة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): a_{n+1} \leq 1$

من الفرض

$a_n \leq 1$

نضيف 1 $\Rightarrow a_n + 1 \leq 2$

$1 + a_n^2 \leq 2$

نقسم على 2 $\Rightarrow \frac{1+a_n^2}{2} \leq 1$

محققة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- إثبات التزايد:

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$a_1 = \frac{1+a_0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(n+1): \quad a_{n+1} \geq a_n$$

نبرهن $a_1 > a_0$

$$a_1 = \frac{1+a_0^2}{2} \geq a_0$$

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1+a_{n+1}^2}{2} \geq a_{n+1}$$

نستنتج أنه: إذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة ولكن ليس بالضرورة أن تكون متقاربة من حدها الأعلى والمتتالية في المثال السابق نوجد رابط من خلال حل المعادلة $f(x) = x$.

$$x = \frac{1+x^2}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = 1.$$

تمرين: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; n \geq 1 , a_1 = 2.$

أثبت أن المتتالية المعطاة بالشكل التالي هي متزايدة ومحدودة ومتقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال العدد النيبري e

الحل:

لدراسة التزايد نأخذ التابع الموافق $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ هذا التابع معرف عندما $x\in]1,+\infty[$

$f(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$f'(x)=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\cdot x\right)\cdot e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$=\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

نأخذ $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$; $x\in]1,+\infty[$.

$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$

$=\frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}<0$.

x	1		∞
g'		$-$	
g	$\ln 2-\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$g(x)>0$ من $f'(x)>0$ والتابع f متزايد تماماً فالمتتالية متزايدة.

x	1		∞
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	e

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- نلاحظ من جدول تغيرات u_n أن التابع متزايد ومحدود من الأعلى و الأدنى فالمتتالية المتوافقة متقاربة وبالتالي تتقارب بالمعدد النيبرعي م.

- تعريف النظرية العليا للمتتالية والنظرية الدنيا والمتتالية الجزئية

- المتتالية الجزئية هي متتالية تؤخذ من المتتالية الأصلية بالاعتماد على صفة معينة

مثال: (u_{2n}) متتالية تمثل مجموعة الأعداد الزوجية من متتالية الأعداد الطبيعية و (u_{2n+1}) تمثل مجموعة الأعداد الفردية

نميز بين ثلاث حالات للنظرية

1) النظرية التقليدية للمتتالية إذا كانت المتتالية تقترب من عدد معين عندما $n \to +\infty$

2) النظرية العليا هي نظرية المتتالية الجزئية للقيم العظمى وتستخدم عندما تكون المتتالية غير متقاربة ولها سلوك محدود من الأعلى

3) النظرية الدنيا هي نظرية المتتالية الجزئية للقيم الصغرى وتستخدم عندما تكون المتتالية غير متقاربة ولكن لها سلوك أو محدودة من الأدنى وقد تنطبق النظريات على بعض

ملاحظة:

1) قد تكون المتتالية متذبذبة لكنه لا تتجاوز حد معين من الأعلى أو من الأدنى لذلك نستخدم النظرية العليا والدنيا لوصف هذا السلوك وقد تنطبق النظريات الثلاثة السابقة عندما تكون المتتالية متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

a_n	n
0	1
1.5	2
0.33	-1	3
0.25	+1	4

ملاحظة: المتتالية تتذبذب بينه قيم موجبة وقيم سالبة ونلاحظ أنه متتالية القيم الموجبة تقترب من 1 ومتتالية القيم السالبة تقترب من -1.

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = 1 \quad ; \quad \liminf_{n \to \infty} a_n = 1.$$

مثال: $U_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = 1$$

وهي نهاية العليا وندعو الصفر عندما $n=1$ النهاية الدنيا للمتتاليات.

مثال:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ 0 & n \text{ فردي} \end{cases} \quad ; \quad n \geq 0.$$

n	a_n
0	1
1	0
2	1
3	0

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أنّه $\lim\sup a_n = 1$

$\lim\inf a_n = 0$

تمرين: لدينا المتتالية $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

لدينا المتتاليتين الجزئيتين

$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$

$u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}$

$\lim\sup a_n = 1$

$\lim\inf a_n = -1$

ومنه الواضح إنّ المتتاليتين مختلفتين

شرط كوشي للتقارب:

نسمّي المتتالية (a_n) متتالية كوشي إذا حققت الشرط

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} ; \forall m, n \geq N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

ونلاحظ أنّه: كل متتالية متقاربة هو حتماً متتالية كوشي

لكنّ العكس ليس صحيحاً.

مثال: لدينا $a_n = \frac{1}{n}$ اثبت أنها متتالية كوشي

لنفرض $\varepsilon = 0.01$

$|a_m - a_n| < 0.01$

ونفرض أنّ $N = 100$

$\left|\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right| < 0.01 \Rightarrow 0.00009 < 0.01$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: $u_n = \frac{\sin n}{3^n}$ هل هذه المتتالية متتالية كوشي

الحل:

1. حلول المتتالية

$$|\sin n| \leq 1$$

و 3^n متتالية متزايدة سريعاً

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n}$$

بالتالي المتتالية متناقصة وتقترب من الصفر

البرهان:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n| + |a_m| \leq \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m}$$

نختار N بحيث

$$\frac{1}{3^N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا المتتالية متتالية كوشي

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z