كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

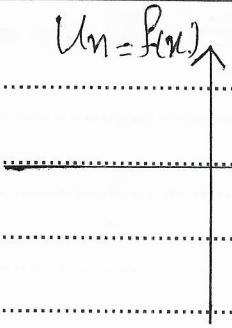
المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960




متتالية في الرياضيات

المتتالية هي مجموعة غير منتهية من الأعداد وقابلة للعد.

مثال: $\{1, 2, \dots\}$ متتالية

$\{0, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ متتالية.

- يمكن تعريف المتتالية بطرق متعددة

① $U_n = f(n)$ نأخذ مثلاً

② $U_0 = 0 \quad U_{n+1} = f(U_n)$

مثال: $U_n = \frac{2n-1}{n-3} \; ; \; n \geq 4$

$U_4 = 7 \; , \; U_5 = \frac{9}{2}$

$2 < U_n < 7$

مثال: $U_{n+1} = 2U_n - 5 \; ; \; U_1 = 2$

$U_2 = 2U_1 - 5 = -1 \; , \; U_3 = -7 \; , \; U_4 = 19$

مثال:

$U_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \; ; \; n \geq 1 \Rightarrow U_1 = -\frac{1}{2} \; , \; U_2 = \frac{1}{4} \; , \; U_3 = -\frac{1}{6}$

إطراد متتالية: إذا كانت المتتالية تحقق الشرط $U_{n+1} > U_n$ تكون متزايدة تماماً، وإذا كان $U_{n+1} \geq U_n$ تكون متزايدة. وإذا كان $U_{n+1} < U_n$ تكون متناقصة، وإذا كان $U_{n+1} \leq U_n$ تكون متناقصة تماماً.

مثال:

$$U_n = \frac{1}{n+2} \; ; \; U_0 = \frac{1}{2}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+3}$$

$U_{n+1} < U_n$ متتالية متناقصة

$$\lim_{n \to \infty} U_n = 0$$

ومنه المتتالية تقترب منه الصفر.

ملاحظة: نلاحظ هنا أنّ المتتالية تبدأ من حدّ معيّن وتتناقص حتّى تتقارب إلى الصفر ونقول أنّ المتتالية متقاربة وحدّها الأعلى $\frac{1}{2}$ وحدّها الأدنى 0، $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

ولفلاعي ندعوها متتالية محدودة إما متقاربة أو متباعدة.

مثال: $U_n = \sqrt{2n-4}$ ، $n \geq 2$

$U_4 = 2$ ، $U_3 = \sqrt{2}$ ، $U_n = 0$

نلاحظ أنّ المتتالية $U_n$ متزايدة ومحدودة من الأدنى $U_n \geq 0$ نلاحظ أنها متباعدة إلى $\infty$ وندعوها متتالية متباعدة.

ملاحظة:

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \ell \; ; \; |U_n - \ell| < \varepsilon$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: التقارب من عدد ℓ مفروض: نقول عن المتتالية $U_n$ أنها متقاربة من ℓ إذا تحقق الشرط التالي $\forall \varepsilon > 0$ نوجد عدد حقيقي موجب صغير جداً فإنه يوجد $N(\varepsilon)$

$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

مثال: اثبت أن المتتالية $U_n = \frac{1}{n}$ متقاربة من الصفر

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) ; n > N(\varepsilon)$

$$= \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

مثال: أثبت أن المتتالية $U_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ متقاربة من 1

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; n > N(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |U_n - 1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n^2-1-n^2-1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{n^2+1}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n^2+1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

$$N_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\right] + 1$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المتتالية الهندسية

$U_n = a \cdot q^n$ ، $U_0 = a$ ، $U_1 = a \cdot q$ ، $U_2 = a \cdot q^2$

مثال:

$U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ متناقصة

$U_n = -2(3)^n$ متناقصة

ملاحظة:

$|q| < 1$ متقاربة من الصفر

$q > 1$ متباعدة لـ $+\infty$

$q = 1$ ثابتة

$q \leq 1$ ليس لها نهاية محددة

مثال: اثبت أن المتتالية $U_n = q^n$ متقاربة من الصفر عندما $|q| < 1$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : n > N_\varepsilon \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon$

$|q^n| < \varepsilon \Rightarrow n \ln|q| < \ln \varepsilon$

بما أن $|q| < 1$ فإن

$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$

$N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}\right] + 1$

مثال: اثبت أن المتتالية $U_n = q^n$ متباعدة إلى $\infty$ عندما $q > 1$

نضع $q - 1 > 0$ لنبرز $a = q - 1$

$q = a + 1 \Rightarrow q^n = (a+1)^n$

$q^n = 1 + n \cdot a + \frac{n(n+1)}{n!} a^2 + \ldots > na$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$n \cdot a \to \infty \Rightarrow q^n \to +\infty$

يوجد عدة براهين لهذا التقارب

أولاً: مجموع متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة وكذلك طرحهما وكذلك القسمة بشرط أن لا يكون المقام صفر أو يسعى للصفر

ثانياً: إذا كانت إحدى المتتاليتين متقاربة والأخرى متباعدة فالمجموع متباعدة

ثالثاً: المتتاليات ذات الحد العام يمكن أن يمثل تابع عددي نستفيد منه لدراسة المتتاليات والنهايات

مثال:

$U_n = \frac{1}{n+1}$ ؛

نأخذ $f(x)$ تابع بحيث $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$

$U_n$ متناقصة

المتتالية $U_n = \frac{\ln(n)}{n}$ متقاربة من الصفر

كذلك يمكن المقارنة والمماثلة يمكنه الاستفادة منها في دراسة النهايات

مثال:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

نفرض $a = \sqrt[n]{n} - 1$

$\sqrt[n]{n} = 1 + a \Rightarrow n = (1+a)^n = 1 + n \cdot a + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a^2 >$

$\frac{n(n-1)}{2} a^2$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$1 > \frac{n-1}{2} a^2 \Rightarrow 2 > (n-1)a^2$

$a^2 < \frac{2}{n-1} \Rightarrow 0 < a < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

# مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات( كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

## طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960