كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* خواص المجموعات المغلقة:

1) لدينا بحسب خواص المجموعات المفتوحة Φ, E مجموعتان مفتوحتان في أي فضاء تبولوجي (E,Z) إذاً لدينا فإن قيمة كلٍّ منهما هي مجموعة مغلقة أي أن Φ, E مجموعتان مغلقتان في أي فضاء تبولوجي (E,Z).

* المجموعتان Φ, E مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان بآنٍ معاً في أي فضاء تبولوجي (E,T).

2) لتكن $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ أسرة منتهية من المجموعات المغلقة في الفضاء (E,T) عندئذٍ بحسب تعريف المجموعة المغلقة تكون $\{E\setminus F_1, E\setminus F_2, \dots, E\setminus F_n\}$ أسرة منتهية من المجموعات المفتوحة (E,T) وبحسب خواص المجموعات المفتوحة يكون $\bigcup_{i=1}^{n}(E\setminus F_i)$ مجموعة مفتوحة ولكن بحسب دومورغان لدينا

$$\bigcup_{i=1}^{n}(E\setminus F_i) = E\setminus\bigcap_{i=1}^{n}F_i$$

أي أن $E\setminus\bigcap_{i=1}^{n}F_i$ مجموعة مفتوحة في (E,T) ومنه بحسب تعريف المجموعة المغلقة نجد أن $\bigcap_{i=1}^{n}F_i$ مجموعة مغلقة في (E,T)

* أي أن أي اجتماع منتهٍ لمجموعات مغلقة في (E,T) هو مجموعة مغلقة في (E,T).

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

3) لتكن $\{F_i : i \in I\}$ أسرة كيفية من المجموعات المغلقة نجد أن $E \setminus F_i$ مجموعة مفتوحة بالتالي هي من مواجب المجموعات المفتوحة نجد $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$ مجموعة مفتوحة بسبب دومورغان نجد $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i) = E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$ مجموعة مفتوحة في (E,T) $\bigcap_{i \in I} F_i$ مجموعة مغلقة في (E,T) بسبب تعريف المجموعة المغلقة

* أي تقاطع لمجموعات مغلقة في (E,T) هو مجموعة مغلقة في (E,T)

* بنية الفضاء التبولوجي

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,T) ولتكن $x \in E$ نقطة معروفة

1) يقال عن x أنها نقطة داخلية للمجموعة A في الفضاء (E,T) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة واحدة على الأقل مثل G بحيث $x \in G \subset A$ تسمى مجموعة جميع النقاط الداخلية للمجموعة A في (E,T) داخلية المجموعة A ويرمز لها بأحد الرمزين $\text{int}A$ أو A°

2) يقال عن x أنها نقطة خارجية للمجموعة A في (E,T) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة واحدة على الأقل مثل T تحقق $x \in T \subset E \setminus A$

$(\exists T \in T : x \in T \wedge T \cap A = \varphi)$

* مجموعة جميع النقاط الخارجية لـ A في (E,T) تسمى خارجية A ويرمز لها بالرمز EXA

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظات:

1) من تعريف النقطة الداخلية لمجموعة ينتج مباشرة إن كل نقطة داخلية لـ A هي A نقطة من A لذلك فإن علاقة محققة دوماً $A^\circ \subset A$

2) كذلك من تعريف خارجية مجموعة A ينتج مباشرة أن كل نقطة من خارجية مجموعة A هي نقطة من متممة A فإن $Ext A \subset E \setminus A$ علاقة محققة دوماً.

* من 1 و 2 نجد أن

$A^\circ \cap Ext A \subset A \cap (E \setminus A) = \varphi$

أي $A^\circ = Ext A = \varphi$.

3) من تعريف النقطة الداخلية والخارجية لمجموعة نجد أن

$Ext A = (E \setminus A)^\circ$

4) إذا كان A و B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء توبولوجي (E, T) حيث أن

$A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ و $Ext B \subset Ext A$

* $\forall x \in A^\circ \Rightarrow \exists G : x \in G \subset A$ لأن

ولدينا

$x \in G \subset B \Rightarrow x \in B^\circ$ $\Leftarrow A \subset B$

$A^\circ \subset B^\circ$

* بما أن $A \subset B \Rightarrow E \setminus B \subset E \setminus A \Rightarrow (E \setminus B)^\circ \subset (E \setminus A)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن $E=\{1,2,3,4,5\}$ نعرف على E طبولوجيا بالشكل

$\tau=\{E,\varphi,\{1,2,3\},\{4,5\}\}$

1) حدد أسرة المجموعات المغلقة في (E,τ).

2) لتكن $A=\{1,4,5\}$ حدد A° و $\overline{A}$

3) لتكن $B=\{1,2,3\}$ حدد B° و $\overline{A}$

الحل:

1) $f=\{\varphi,E,\{4,5\},\{1,2,3\}\}$

2) بما أنه $A^\circ \subset A$ محقق دوما

لإيجاد A° نناقش تبعا A

$x=1$

$x\in A^\circ \Rightarrow \exists G\in\tau; x\in G\subset A$

من أجل $x=1$ نجد مجموعتان مفتوحتان في E و $\{1,2,3\}$

العنصر 1 ينتمي لهما ولكن

$E\not\subset A, \{1,2,3\}\not\subset A$

$1\notin A^\circ$ ✗

من أجله $x=4$

$\exists G=\{4,5\}\in\tau; 4\in G\subset A \Rightarrow 4\in A^\circ$

ومنه $x=5$

$\exists G=\{4,5\}\in\tau; 5\in G\subset A \Rightarrow$

$5\in A^\circ$ ومنه $A^\circ=\{4,5\}$

لإيجاد $\overline{A}$ بما أنه $\overline{A}\subset E\setminus A$ نناقش فقط حتمية

$E\setminus A$ أولا أنه $\overline{A}=(E\setminus A)^\circ$

$E\setminus A=\{2,3\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من أجله $\chi=2$ نجد أن المجموعتان المفتوحتان E و $\{1,2,3\}$ العنصر 2 ينتمي لهما ولكن $2 \notin E \setminus A$ و $E \setminus A \subset \{1,2,3\}$ $2 \notin P \times A$ بنفس الطريقة نجد أن $3 \notin P \times A$ و $P \times A = \emptyset$

من أجله $\chi=1$ ـ (3

$$\exists G \in T ; 1 \in G \subseteq B \longrightarrow 1 \in B^{\circ}$$

من أجله $\chi=2$ ⟸

$$\exists G\{1,2,3\} \in T ; 2 \in G \subseteq B \longrightarrow 2 \in B^{\circ}.$$

من أجله $\chi=3$ ⟸

$$\exists G\{1,2,3\} \in T ; 3 \in G \subseteq B^{\circ} \longrightarrow 3 \in B^{\circ}$$

$B^{\circ} = \{1,2,3\}$

$P \times B = \{4,5\}$.

المجموعة B هنا مغلقة ومفتوحة.

نظرية: إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,T) وكانت $\{G_i / i \in I\}$ أسرة جميع المجموعات المفتوحة في (E,T) والتي كل منها تحقق العلاقة $G_i \subseteq A \ \forall i \in I$.

عندئذٍ تتحقق المساواة $A^{\circ} = \bigcup_{i \in I} G_i$

نتائج:

1) من النظرية السابقة ينتج مباشرة أن داخلية أي مجموعة A هي مجموعة مفتوحة في أي فضاء تبولوجي (E,T)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) بما أنّ $Ext A=(Int A)^c$ فإنّ نهاية أي مجموعة هي مجموعة مغلقة في (E,T) وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $Int A$.

4) إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي عندئذٍ تكون A مجموعة مفتوحة في (E,T) إذا وفقط إذا $A=A^\circ$

تعريف: لتكن A و B مجموعتين كيفيتين من نقاط الفضاء التبولوجي (E,T).

* يُقال عن المجموعة A أنها مجاورة للمجموعة B في (E,T) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة في (E,T) مثل G بحيث يكون $B\subset G\subset A$. ترمز لأسرة جميع مجاورات B في الفضاء (E,T) بالرمز $V(B)$ أو $N(B)$.

حالة خاصة: عندما $B=\{x\}$ مجموعة وحيدة العنصر نقول على مجاورة نقطة ونعرفه بالشكل

$$\exists G\in T;\ x\in G\subset A;\ A\in V(x).$$

ملاحظة:

1) أيا كانت المجموعة A وأيا كانت x في الفضاء التبولوجي (E,T) فإنّ $V(x)\neq\varphi$ لأنّ E على الأقل $E\in V(A)$ وذلك لأنّ $G=E\in T$ بحيث $A\subset G=E$ ويكفي بالشكل نفسه أنّ $E\in V(x)\ \forall x\in E$.

2) إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,T) فعندئذٍ تكون A مجموعة مفتوحة في (E,T) إذا وفقط إذا كانت A مجاورة لكل نقطة من نقاطها.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة:

بما أنه $\bigcup_{i\in I} G_i \subset A$ فإنه داخلية (A°) A

هو أكبر مجموعة مفتوحة في A

ملاحظة:

لإيجاد داخلية A نوجد أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

مثال: نعرف على المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$ التبولوجيا

$$\tau=\{E,\varphi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\},\{c,d\},\{d\}\}$$

1- لتكن $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{b,c,d\}$

أ- A° ، $E\setminus A$ ، B° ، $E\setminus B$

ب- $V(B)$ ، $V(c)$

الحل:

1- A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A $\subset A$ $A=A^\circ$

كون A مفتوحة

$E\setminus A$: هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في E $\subset E\setminus A=\{d\}$

$E\setminus A=\varphi$ لأنه لا يوجد سوى المجموعة المفتوحة φ محتواة في $E\setminus A$

B° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في B $\subset B$ $B=\{c,d\}$

$E\setminus B$ هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $E\setminus B=\varphi\subset E\setminus B=\{a\}$

2- إيجاد $V(B)$ نقول عن المجموعة D أنها مجاورة لـ B إذا وفقط إذا

$$D\in V(B) \Leftrightarrow \exists G\in\tau;\ B\subset G\subset D$$

نلاحظ أنه لا يوجد سوى المجموعة المفتوحة E بحيث $B\subset C=E \Rightarrow E\in V(B)$ تحقق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$B \subset C = F \longrightarrow E \in V(B)$.

* إيجاد $V(c)$

$D \in V(c) \Leftrightarrow \exists G \in T;\ C \in G \in D$.

$V(c) = \{ V \in P(E);\ \{c\} \subset V \}$.

$V(a) = \{ V \in P(E),\ \{a,b\} \subset V \} = \{ \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, E \}$.

~~تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,T) ولتكن $x \in E$ نقطة مفروضة~~

~~1) يقال عن x أنها نقطة لاصقة لـ A في (E,T) إذا وفقط إذا تحقق الشرط~~

~~$V \cap A \neq \varphi \quad \forall V \in V(x)$~~

~~تسمى مجموعة جميع النقاط اللاصقة في المجموعة A ويرمز لها بأحد الرمزين $\overline{A}$ أو $Cl(A)$~~

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,T) ولتكن $x \in E$ نقطة مفروضة

1) يقال عن x أنها نقطة لاصقة لـ A في (E,T) إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$V \cap A \neq \varphi \quad \forall V \in V(x)$

تسمى مجموعة جميع النقاط اللاصقة في المجموعة A ويرمز لها بأحد الرمزين $\overline{A}$ أو $Cl(A)$

2) يقال عن x أنها نقطة تراكم للمجموعة A في (E,T) إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$V \cap A \neq \varphi, \{x\} \quad \forall V \in V(x)$

تسمى مجموعة جميع نقاط التراكم لـ A في (E,T) مشتق

TEL:0931497960 Facebook Group: A to Z مكتبة

المجموعة E ويرمز لها بالرمز E'.

ملاحظة:

1- أياً كانت المجموعة A وأياً كانت الفضاء التبولوجي (E,T) فإن $A \subset \bar{A}$ علاقة محققة دوماً وذلك لأن

$\forall x \in A \Rightarrow \forall V \in V(x) \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in V \forall V \in V(x)$

$\Rightarrow x \in A \cap V \forall V(x)$

$\Rightarrow A \cap V \neq \varphi \quad \forall V \in V(x)$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$.

2- إن عكس الملاحظة السابقة غير صحيح بالضرورة أي ليس بالضرورة أن تكون $\bar{A} \subset A$

مثال:

نعرف على المجموعة $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ التبولوجيا

$T=\{E, \varphi, \{1,2,3,5\}, \{2,4,6\}, \{2\}\}$

لتكن $A=\{1,3,4\}$ و $\bar{A}$ هي A'.

الحل: نعرف على المجموعة

إيجاد الصاقة

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in V(x): V \cap A \neq \varphi$

بما أن $A \subset \bar{A}$ محققة دوماً لذلك نناقش فقط

$E \setminus A = \{2,5,6\}$

* من أجل $x=2$ نجد:

$V(2)=\{V \in P(E), \{2\} \subset V\}$

نوع كل المجموعات من $P(E)$ التي تحوي العدد 2

توجد المجاورة $V_0=\{2\}$ بحيث $V_0 \cap A = \varphi \Rightarrow 2 \notin \bar{A}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من أجل $x=5$

$$V(5)=\{V\in P(E);\{1,2,3,5\}\subseteq V\}$$

$$=\{\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5,6\},E\}$$

كل مجموعة منطوية في $P(E)$ وهي تحوي المجموعة $\{1,2,3,5\}$

$$\forall V\in V(5);\{1,3\}\subseteq V\cap A\Rightarrow V\cap A\neq\varphi\Rightarrow 5\in A$$

من أجل $x=6$

$$V(6)=\{V\in P(E);\{2,4,6\}\subseteq V\}$$

$$\forall V\in V(6),4\in V\cap A\Rightarrow V\cap A\neq\varphi\Rightarrow 6\in A$$

$$\bar{A}=\{1,3,4,5,6\}.$$

$$x\in A'\Leftrightarrow \forall V\in V(x),\ V\cap A\neq\varphi(x)$$

من أجل $x=1$

$$V(1)=\{V\in P(E);\{1,2,3,5\}\subseteq V\}$$

$$\forall V\in V(1)\Rightarrow\{1,3\}\subseteq V\cap A$$

$$\Rightarrow V\cap A\neq\varphi,\{1\}\Rightarrow 1\in A'$$

بنفس الطريقة نجد $x=3$ من A'

من أجل $x=2$ نجد

$$V(2)=\{V\in P(E);\{2\}\subseteq V\}$$

من أجل $x=5$

$$V(5)=\{V\in P(E);\{1,2,3,5\}\subseteq V\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= \{\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5,6\},E\}$

$\forall \mathcal{U} \in V(5) ; \{1,3\} \subseteq \mathcal{U} \cap A \Rightarrow \mathcal{U} \cap A \neq \varphi , \{5\}$

$x=6$ هيك أخذت *

$V(6) = \{\mathcal{U} \in P(E) ; \{2,4,6\} \subseteq \mathcal{U}\}$

$\forall \mathcal{U} \in V(6) ; 4 \in \mathcal{U} \cap A \Rightarrow \mathcal{U} \cap A \neq \varphi$

$\exists \mathcal{U}' = \{2,4,6\} ; \mathcal{U}_1 \cap A = \{4\} \Rightarrow 4 \notin A'$

$A' = \{1,3,5,6\}$ ⟸

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة