كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية: هي المواضيع الهامة جداً في الكثير من فروع الرياضيات وتستخدم في علوم الهندسة والفيزياء والكيمياء حيث أنها أغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلة تفاضلية ولابد لفهم المسألة من حلّ المعادلة التفاضلية أو على الأقل معرفة خصائص هذا الحلّ.

مفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية:

- المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.
- المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجات العليا.
- المعادلات التفاضلية من المراتب العليا.
- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية.
- المعادلة التفاضلية الخطية من المراتب العليا.
- تشكيل المعادلات التفاضلية

a) تشكيل المعادلات التفاضلية من بعض المسائل الهندسية والفيزيائية

أ) من الهندسة:

مثال: منحنى مفروض بالشرط بحيث أن ميل المماس يساوي ضعف مجموع الإحداثيات

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+y).$$

2) منحني معرّف بالشكل حيث أن مجموع احداثيات نقطتي التقاطع مماس لمنحني في النقطة x,y مع المحورين الاحداثيين ثابت وليكن 2

الحل:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

X,Y نقطة كيفية على المماس.

x,y نقطة التماس.

نقاطع معادلة المماس مع محاور الاحداثيات

$Y = 0$ و $X = 0$

$X = 0$

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(-x)$$

$$Y = y - x\frac{dy}{dx}$$

$Y = 0$ ⟵

$$X = x - y\frac{dx}{dy}$$

$$2 = X + Y = y - x\frac{dy}{dx} + x - y\frac{dx}{dy}$$

نضرب بـ $\frac{dy}{dx}$ لأنها بسط y

$$y\frac{dy}{dx} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x-2)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية التي تعطي لنا معادلة المنحني المطلوب.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3- أوجد معادلة المنحني لـ $y = 9x$ حيث أن كل مماس له يقطع المستقيم $x = 1$ في نقطة فاصلتها تساوي ضعف فاصلة نقطة التماس

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

$X = 1$

$$1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x).$$

في الفيزياء:

ليكن لدينا جسم كتلته m يتحرك على محور موجه ox نطبق عليه قوة تتناسب مع بعده x عن المبدأ وتتجه نحو o وقوة مقاومة تتناسب طرداً مع سرعته عند موضع الجسم في كل لحظة.

القوة الأولى: $-k_1 x$

القوة الثانية $-k_2 \frac{dx}{dt}$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x - k_2 \frac{dx}{dt}$$

وهي معادلة تفاضلية نصل بواسطتها على x كتابع لـ t أي نستطيع أن نعين موضع الجسم بكل لحظة.

تعريف المعادلة التفاضلية: علاقة تحتوي على تابع ومشتقاته هذا التابع بالنسبة لمتحول مستقل أو أكثر.

تصنيف المعادلات التفاضلية:

- المعادلات التفاضلية العادية، المعادلات التفاضلية الجزئية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المعادلة التفاضلية العادية: هي كل علاقة تحتوي على تابع y ومتحول مستقل واحد x ومشتقات التابع y بالنسبة للمتحول المستقل وتكتب بالشكل

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \dots\right) = 0$$

المعادلات التفاضلية الجزئية: هي كل علاقة تحتوي على تابع Z ومتحولين مستقلين أو أكثر ومشتقات الجزئية للتابع Z بالنسبة لمتحولاته المستقلة وتكتب بالشكل

$$F\left(x, y, Z, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \dots\right)$$

رتبة معادلة تفاضلية: هي رتبة أعلى مشتق تحويه المعادلة.

- درجة معادلة تفاضلية (قوى): هي درجة أعلى مشتق تحويه المعادلة وذلك بعد وضعها على صورة خالية من الجذور (جذور التابع ومشتقاته وليس التابع المستقل).

أمثلة:

1- $y' + y^2 = 5x^2$ معادلة تفاضلية عادية رتبتها 1 ودرجتها 1.

2- $2y'' + \sin y'' y' = x^2 y$ معادلة تفاضلية عادية رتبتها 2 ودرجتها 1.

3- $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$.

معادلة تفاضلية عادية رتبتها 1 ودرجتها 1.

4- $\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ معادلة تفاضلية جزئية.

5- $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = 3y''$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتحديد رتبة ودرجة هذه المعادلة يجب التخلص من الأس $\frac{3}{2}$

$$(1+y'^2)^3 = 3y''^2$$

معادلة تفاضلية رتبتها 2 ودرجتها 2.

- حلّ المعادلة التفاضلية: نقول عن التابع $y=f(x)$ أنّه حلّ المعادلة التفاضلية $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ إذا كان:

1) قابلاً للاشتقاق n مرة

2) يحقق المعادلة التفاضلية.

تمرين: أثبت أنّ $y=\sin x$ حلّ المعادلة التفاضلية $y''+y=0$

$y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \; ; \; y''=-\sin x$

$-\sin x+\sin x=0$

ومنه $y=\sin x$ حلّ المعادلة التفاضلية.

- المنحني التكاملي: هو الخط البياني للتابع $y=f(x)$ الذي يمثّل حلّ المعادلة التفاضلية $F(x,y,y',\dots,y^n)$ ---①

- الحلّ العام والتكامل العام لمعادلة تفاضلية:

- الحلّ العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة n هو حلّ يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وهو من الشكل

$y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$ ---② حيث $C_1,\dots,C_n$ ثوابت كيفية مستقلة بعضها عن بعض وعددها يساوي مرتبة المعادلة

- إذا لم نتمكن من كتابة الحلّ العام على الشكل ② وإنما على شكل تابع ضمني (غير محلولة بالنسبة لـ y)

$\varphi(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$ ---③

عندها نسمّي (3) التكامل العام للمعادلة 1.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحلّ الخاص: هو كلّ حلّ للمعادلة التفاضلية نحصل عليه من صيغة الحلّ العام بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً محددة.

مثال:

$y'' + y = 0$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$M_2(\frac{\pi}{2}, 0)$ ، $M_1(0,1)$ جد الحلّ الخاص العابر من $M(0,1)$

$M(\frac{\pi}{2}, 0)$

$1 = C_1 + 0 \Rightarrow C_1 = 1$

$0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$y = \cos x$

الحلّ الشاذ: هو كلّ حلّ للمعادلة التفاضلية لا يمكن الحصول عليه من صيغة الحل العام بإعطاء الثوابت قيماً محددة

$y'^2 - yy = 0$

$y = (x+C)^2$

$y = 0$ حل المعادلة ولكنه لا نحصل عليه من الحلّ العام.

ملاحظة: حلّ المعادلة التفاضلية أي حل المعادلة بالحل العام + الحلّ الشاذ.

b) تشكيل المعادلات التفاضلية من مجموعة منحنيات

نفرض لدينا $f(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ تمثل معادلة مجموعة من المنحنيات بالمتوسط أي لكل قيمة نعوض بالثوابت $C_1, \dots, C_n$ تعين قيمة في المتوسط

باشتقاق هذه العلاقة الجبرية نحصل على $(n+1)$ علاقة (مع العلاقة الأصلية ضمناً) بحذف الثوابت نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة $F(x, y, y', \dots, y^n)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $y^2 = 4x + c$ ⟵ $2yy' = 4$

نكتب المعادلة التفاضلية من خلال اشتقاق الطرفين.

مثال:

$y = cx + 5$ ⟵ $y = cx + 5$

نقطة مشترك نجد $\begin{cases} y = cx + 5 & \text{---} (1) \\ y' = c & \text{---} (2) \end{cases}$

$y = y'x + 5$

وهي المعادلة التفاضلية

مثال:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ ---(1)

$2(x-a) + 2y'(y-b) = 0$ ---(2)

$2 + 2y'^2 + 2y''(y-b) = 0$ ---(3)

من 3 نجد

$$y - b = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

$$x - a = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

بالتعويض في 1 نجد

$$\frac{y'^2(1+y'^2)^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = 25$$

$$(y'^2+1)^3 = 25y''^2$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة