



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

# التحليل العددي

قسم الفيزياء

السنة الثالثة \_ المحاضرة الأولى

## الفهرس

الفصل الأول: الأخطاء ( أنواعها \_ حسابها )

الفصل الثاني: الحلول التقريبية للمعادلات غير الخطية

الفصل الثالث: الاستيفاء

الفصل الرابع: الحلول التقريبية لجملة المعادلات الخطية

الفصل الخامس: التفاضل العددي

الفصل السادس: التكامل العددي

الفصل السابع: الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية

مقدمة:

يعتبر التحليل العددي من أهم موضوعات الرياضيات التطبيقية لعلاقته المباشرة بالتطور التكنولوجي المتسارع حيث تم الاستفادة من القدرات الهائلة للحواسيب في إيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية يصعب حلها بالطرق التحليلية و الجبرية المعتادة، على سبيل المثال يصعب إيجاد الحلول الدقيقة للمعادلة الجبرية:

$$x^9 - 5x^4 + x^2 - 2x + 5 = 0 \text{ وفق الطرق التقليدية، لذا نلجأ لإيجاد حلول تقريبية لها، مثال آخر :}$$

حل بعض المعادلات التفاضلية مع شروط ابتدائية معينة أو حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية....الخ. في مثل هذه المسائل نبحث عن خوارزميات و هي طرق محددة الخطوات للوصول من البيانات المعطاة إلى

نتائج أو حلول تعد تقريباً للحلول الدقيقة، و الحل التقريبي للمسائل قد يكون كثيرة حدود، و قد يكون حلاً

عددياً: عدد واحد كجذر لمعادلة جبرية أو قيمة لتكامل محدد ، أو عدة أعداد تمثل قيم الدالة  $y$  (قد تمثل حلاً

لمعادلة تفاضلية) عند بعض قيم  $x$ ، و في هذه الحالة نحن لا نحصل على الصيغة التحليلية لحل المعادلة

التفاضلية و إنما نحصل على بعض قيم الدالة  $y$  في المدى الذي نهتم فيه بحل المعادلة التفاضلية.

إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالباً ما تمثل المقادير الفيزيائية بنتيجة القياس

الذي هو بحد ذاته تقريبي، كما أننا نستبدل أعداد تقريبية في كثير من المسائل بالأعداد الدقيقة ما يؤدي

لظهور أخطاء ندعوها أخطاء التقريب كما أن هناك أنواع أخرى من الأخطاء المرتكبة و هي:

#### 1. أخطاء الصيغ:

و هي أخطاء ناتجة عن الصيغ و العلاقات المستخدمة للتعبير عن الحوادث الفيزيائية أو القوانين الهندسية

عندما تحتوي هذه العلاقات على ثوابت تقريبية مثل قانون مساحة الدائرة

$$S = \pi r^2 \text{ حيث نعتبر } 3.14 \text{ قيمة تقريبية للثابت } \pi.$$

#### 2. أخطاء الاقتطاع:

و هي الأخطاء التي تنشأ عن استبدال عملية منتهية بعملية لا نهائية كأن نكتب الدوال على شكل متسلسلات

لا نهائية و عند إجراء العمليات الرياضية عليها نكتفي بعدد منته من حدود تلك المتسلسلات ما يؤدي لظهور

أخطاء .

#### 3. الأخطاء الابتدائية:

و هي الأخطاء في البيانات الأولية و تنتج عن قياس بعض المقادير في معظم الأحيان تقريبياً حيث أن دقة

القياس تتبع لحساسية الأجهزة المستخدمة في القياس كما قد تكون هذه الأخطاء ناتجة عن حواس الشخص

الذي يقوم بتلك القياسات.

#### 4. أخطاء التدوير ( التقريب):

ليكن لدينا العدد

$$x = 0.a_1a_2a_3 \dots a_{n-1}a_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}$$

مكتفين ب  $(n - 1)$  رقم على يمين الفاصلة العشرية، عندئذ نكتب:

حيث  $\bar{x} = 0. a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}'$  يحدد وفق القاعدة الآتية:

إذا كان  $a_n > 5$  فإن  $a_{n-1}' = a_{n-1} + 1$  و إذا كان  $a_n < 5$  فإن  $a_{n-1}' = a_{n-1}$  و في حال  $a_n = 5$  عندئذٍ نميز حالتين:

1. إذا كان  $a_{n-1}$  عدداً زوجياً فإن:  $a_{n-1}' = a_{n-1}$

2. إذا كان  $a_{n-1}$  عدداً فردياً فإن:  $a_{n-1}' = a_{n-1} + 1$

و في هذه الحالة نكون قد ارتكبنا خطأ لا يتجاوز  $5 \times 10^{-n}$  مثال: لنأخذ  $x = 0.235345$  عندئذٍ نلاحظ:

$$\bar{x} = 0.23534, 5 \times 10^{-6}$$

$$\bar{\bar{x}} = 0.2353, 4 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$$

$$\bar{\bar{\bar{x}}} = 0.235, 3 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$$

بتدوير العدد السابق إلى عدد يحوي رقم عشري واحد  $\bar{x} = 0.2$  فإن الخطأ المرتكب لا يتعدى  $5 \times 10^{-2}$ . الخطأ المرتكب هو الفرق بين القيمة الدقيقة و القيمة التقريبية  $x - \bar{x}$  و هو مقدار جبري أي قد يكون موجب أو سالب.

نعرف الخطأ المطلق بأنه القيمة المطلقة للخطأ المرتكب و نرمز له  $\delta_x = |x - \bar{x}|$  و هو مقدار موجب دوماً.

كما نعرف الخطأ النسبي بأنه نسبة الخطأ المطلق إلى القيمة الدقيقة للعدد  $e_x = \frac{\delta_x}{x}$ .  
حساب الأخطاء لتتابع في عدة متغيرات:

لتكن لدينا الدالة  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  يعطى الخطأ المطلق بالعلاقة:

$$(\delta f)_{max} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \delta_{x_i}$$

كما يحسب الخطأ النسبي من العلاقة:  $(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f|}$

مثال: لتكن لدينا الدالة  $f(x, y, z) = x^2 y z^3$  احسب الخطأ المطلق و النسبي في حساب قيمة الدالة في

النقطة:  $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.13, 0.101)$

الحل:

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-2}$$

$$\delta_y \leq 5 \times 10^{-3}$$

$$\delta_z \leq 5 \times 10^{-4} \text{ و لدينا:}$$

$$(\delta f)_{max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot \delta_y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot \delta_z$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = |2xyz^3|_{(0.1, 0.13, 0.101)} = 0.00002678$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = |x^2 z^3|_{(0.1, 0.13, 0.101)} = 0.00001030$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = |3x^2 y z^2|_{(0.1, 0.13, 0.101)} = 0.00003978$$

$$(\delta f)_{\max} \leq (0.00002678)(5 \times 10^{-2}) + (0.00001030)(5 \times 10^{-3}) + (0.00003978)(5 \times 10^{-4}) = 0.00000139$$

$$|f| = (0.1)^2 (0.13) (0.101)^3 = 0.00000133$$

$$(e_f)_{\max} \leq \frac{(\delta f)_{\max}}{|f|} \quad \text{و منه يكون الخطأ النسبي}$$

$$\cdot (e_f)_{\max} \leq \frac{0.00000139}{0.00000133} = 1.045112782$$

