كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : كهرباء ومغناطيسية١

المحاضرة : الاولى /نظري/د.سوزان

المحاضرة الأولى

• مبادئ الحساب الشعاعي :

ندرس في هذا الفصل أهم المبادئ الأساسية في الحساب الشعاعي، التي سنعتمد عليها كثيراً للتعبير عن الخواص الرياضية والفيزيائية للحقلين الكهربائي والمغناطيسي اللذين يشكلان بمجموعهما حقلاً وحيداً يطلق عليه اسم الحقل الكهرطيسي .

• 1-1- المقادير السلمية والمقادير المتجهة : Scalars and Vectors

- إن المقدار السلمي يمكن أن يكون موجباً أو سالباً . إن قياس مقدار سلمي يعطينا عدداً جبرياً متبوعاً بواحدة قياس بغية الدلالة على هذا المقدار . فمثلاً : $3Kg$ و $5m$ و $10S$ هي نتائج قياس مقادير الطول والكتلة والزمن على الترتيب كما في جملة الواحدات الدولية ، والتي يرمز لها اختصاراً (SI) . حيث أن الكتلة هي مقدار سلمي موجب ، بينما الشحنة الكهربائية يمكن أن تكون موجبة أو سالبة ، فشحنة الالكترون سالبة بينما شحنة البروتون موجبة . وكذلك العمل هو مقدار سلمي يمكن أن يكون موجباً أو سالباً . تجدر الإشارة هنا إلى أن المقادير السلمية لا تتعلق بالاتجاه في الفضاء .

- تدعى المقادير المقاسة التي تتعلق بالاتجاه في الفضاء بالمقادير المتجهة أو (الأشعة) (Vectors) ، مثل متجهة القوة $\vec{F}$ ومتجهة السرعة $\vec{V}$ ، ويتميز المقدار المتجه عن المقدار السلمي بأنه لا يتعين فقط بمعرفة قيمته العددية وواحدة قياسه ، وإنما يحدد تبعاً لحالته العامة ، بأربعة عناصر هي : مبدؤه ، حامله (خطه) ، جهته ، وطويلته (أو قيمته العددية) .

يرمز عادة للمقدار المتجه بحرف يعلوه سهم في حين يرمز لطويلته بالحرف نفسه بدون سهم فمثلاً : طويلة المتجه (الشعاع) $\vec{A}$ هي A أو $|A|$.

• تحتاج المقادير المتجهة لجبر من نوع خاص هو جبر المتجهات، فمن أجل تحديد موقع متجه ما بالنسبة لجملة الاحداثيات ثلاثية الأبعاد يلزمنا تحديد موقعي نقطة البداية والنهاية، لهذا المتجه، فإذا أخذنا على سبيل المثال المتجه $\vec{A}$ كانت الاحداثيات الديكارتية لنقطتي البداية والنهاية على الترتيب

(x_1 , y_1 , z_1) و (x_2 , y_2 , z_2)

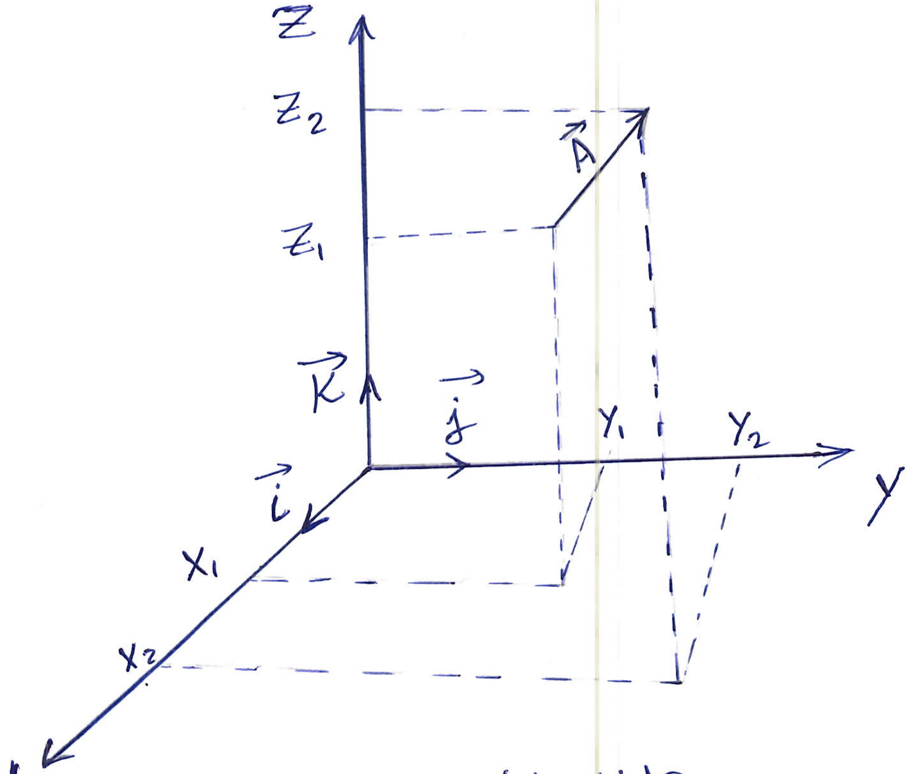
وذلك كما في الشكل ((1-1)). نستطيع التعبير عن المتجه $\vec{A}$ بدلالة مركباته A_x و A_y و A_z على المحاور الاحداثية OX ، Oy ، OZ على الترتيب كما يلي:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{K} \qquad (1-1)$$

حيث: $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{K}$ متجهات الواحدة على المحاور الاحداثية الثلاثة.

وكذلك:

$A_x = x_2 - x_1$ ، $A_y = y_2 - y_1$ ، $A_z = z_2 - z_1$



الشكل (1-1)

مركبات المتجه $\vec{A}$ على المحاور الاحداثية في الجملة الديكارتية

فنقول عن المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أنهما متساويان إذا تساوت مركباتهما المتناظرة على المحاور الاحداثية ونكتب ذلك:

$$\vec{A}=\vec{B} \Leftrightarrow A_x=B_x \text{ و } A_y=B_y \text{ و } A_z=B_z \qquad ((1-2))$$

بالإضافة للجملة الديكارتية، يمكن استخدام الجملة الاسطوانية أو الكروية.

1-2- الجداء السلمي لشعاعين: Scalar product

يعرف الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A_1}$ و $\vec{A_2}$ بأنه المقدار السلمي الناتج عن جداء طويلة الشعاع الأول في طويلة الشعاع الثاني في جيب الزاوية المحصورة بينهما. ونكتب ذلك رياضيا بالعلاقة التالية:

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}=|\vec{A_1}|.|\vec{A_2}|\cos(\vec{A_1},\vec{A_2}) \qquad ((1-3))$$

ويمكن كتابة هذا الجداء بدلالة مركبات هذين الشعاعين على المحاور الإحداثية الثلاثة المتعامدة.

فإذا افترضنا أن مركبات الشعاع $\vec{A_1}$ هي: $\vec{A_1}(X_1, Y_1, Z_1)$

وأن مركبات الشعاع $\vec{A_2}$ هي: $\vec{A_2}(X_2, Y_2, Z_2)$

وأن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ أشعة الواحدة على المحاور الاحداثية الثلاثة المتعامدة، فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 \qquad ((1-4))$$

يتمتع الجداء السلمي لشعاعين بالخواص التالية:

1) $\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}=\vec{A_2}\cdot\vec{A_1}$

2) $(\alpha\vec{A_1})\cdot(\beta\cdot\vec{A_2})=\alpha\beta\,\vec{A_1}\,\vec{A_2}$

حيث: α و β أعداد حقيقية.

3) $\vec{A}(\vec{A_1}+\vec{A_2}+\dots+\vec{A_n})=\vec{A}\vec{A_1}+\vec{A}\vec{A_2}+\dots+\vec{A}\vec{A_n}$

أي أن الجداء السلمي يقبل التوزيع.

تمرين (1): برهن صحة العلاقة:

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$$

الحل: لدينا:

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}=(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{K})\cdot(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{K})$$

$$=(X_1X_2\,\vec{i}\cdot\vec{i}+X_1Y_2\,\vec{i}\cdot\vec{j}+X_1Z_2\,\vec{i}\cdot\vec{K})+$$

$$+Y_1X_2\,\vec{j}\cdot\vec{i}+Y_1Y_2\,\vec{j}\cdot\vec{j}+Y_1Z_2\,\vec{j}\vec{K}+$$

$$+Z_1X_2\,\vec{K}\cdot\vec{i}+Z_1Y_2\,\vec{K}\vec{j}+Z_1Z_2\,\vec{K}\vec{K}$$

وبالاستفادة من العلاقة: ((3-1))

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}=A_1\cdot A_2\cdot\cos(\vec{A_1},\vec{A_2})$$

نجد أن:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{K}\cdot\vec{K}=1$$

لأن θ بين كل من الشعاعين تساوي الصفر وبالتالي $\theta=0$ و $\cos\theta=1$

وكذلك لدينا:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{K}=\vec{K}\cdot\vec{i}=0$$

لأن $\theta=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\cos\theta=0$ بالتبديل بالعلاقة السابقة نجد أن:

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$$

وهو المطلوب.

نستنتج كذلك من العلاقة ((1-4)) أن طويلة الشعاع $\vec{A}$ بدلالة مركباته على المحاور الاحداثية الثلاثة المتعامدة تعطى بالعلاقة التالية:

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad ((1-5))$$

1-3: الجداء الشعاعي لشعاعين: Vector product

يعرف الجداء لشعاعين $\vec{A_1}$ ، $\vec{A_2}$ مثلاً بأنه الشعاع $\vec{B}$ ونكتب ذلك بالشكل:

$$\vec{B} = \vec{A_1} \wedge \vec{A_2}$$

ويكون الشعاع $\vec{B}$ عمودياً على المستوى المعرف بالشعاعين $\vec{A_1}$ و $\vec{A_2}$ في النقطة التي يرسمان فيها، وجهته تتعين بقاعدة الاصابع الثلاث اليد اليمنى، حيث نوجه الإبهام باتجاه المتجه الأول $\vec{A_1}$ والسبابة باتجاه الشعاع الثاني $\vec{A_2}$ فتكون الاصبع الوسطى باتجاه الشعاع الثالث $\vec{B}$. أو وفق دوران البرغي، حيث عندما يدور $\vec{A_1}$ باتجاه $\vec{A_2}$ كي ينطبق عليه فإننا نتقدم باتجاه $\vec{B}$.

أما القيمة العددية للجداء الشعاعي فتعطى بالعلاقة التالية:

$$B = A_1 . A_2 . \sin(\vec{A_1}, \vec{A_2}) \qquad ((1-6))$$

ويمكن كتابة الجداء الشعاعي (الخارجي) لشعاعين بدلالة مركباتهما على المحاور الاحداثية المتعامدة كمايلي:

$$\vec{B} = \vec{A_1} \wedge \vec{A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad ((1-7))$$

$$= (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)\vec{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)\vec{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\vec{K}$$

١-٤ : بعض خواص الجداء الشعاعي :

تتمتع الجداء الشعاعي للأشعة بالخواص التالية :

1) $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{A} \times \vec{A} = 0$

2) $\vec{A_1} \times \vec{A_2} = -\vec{A_2} \times \vec{A_1}$

لا يقبل التبادل :

3) $\alpha \vec{A_1} \times \beta \vec{A_2} = \alpha \beta \vec{A_1} \times \vec{A_2}$

4) $\vec{A} \times (\vec{A_1} + \vec{A_2} + \dots + \vec{A_n}) = \vec{A} \times \vec{A_1} + \vec{A} \times \vec{A_2} + \dots + \vec{A} \times \vec{A_n}$

5) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{C} + \vec{D}) = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{A} \times \vec{D} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{D}$

١-٥ : جداء ثلاثة متجهات في عدة حالات :

1- حالة $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$ إن ناتج هذا الجداء هو مقدار متجه حامله هو حامل المتجه $\vec{A}$ وجهته حسب إشارة الجداء السلمي $\vec{B} \cdot \vec{C}$ ، أما طويلته فهي ناتج جداء طويلة المتجه $\vec{A}$ بالمقدار $BC \cos\theta$ حيث θ الزاوية المحصورة بين $\vec{B}$ و $\vec{C}$.

2- حالة الجداء المختلط $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ إن ناتج هذا الجداء هو مقدار سلمي يساوي حجم متوازي السطوح τ المقام على المتجهات الثلاثة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ، وبأخذ السطوح المختلطة يمكن أن نكتب :

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\vec{C}\times\vec{A}) = \tau \quad ((1-8))$$

3- حالة الجداء المتجه لثلاثة أشعة $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

إن ناتج الجداء هنا هو مقدار متجه عمودي على كل من المتجه $\vec{A}$ ، المتجه $\vec{B}\times\vec{C}$

وأهم خواص هذا الجداء أنه يسمح بتحليله إلى مجموع جدائين سلميين:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C} \quad ((1-9))$$

تحمل العلاقة السابقة ((1-9)) اسم "قانون جيبس".

1-6 : مشتق شعاع تابع لوسيط: Derivative of a vector

إذا كان الشعاع $\vec{A}$ تابعاً لوسيط، وليكن الزمن مثلاً أي $\vec{A}(t)$، فإن مركباته على المحاور الإحداثية الثلاثة المتعامدة تصبح توابعاً للزمن أيضاً ونكتب:

$$X(t),\ Y(t),\ Z(t)$$

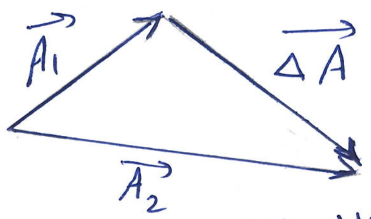
فإذا فرضنا A_1 و A_2 قيمتي الشعاع $\vec{A}$ في اللحظتين t_1 و t_2 فلنحسب الفرق بين هذين الشعاعين $\Delta\vec{A}$ الشكل (1-2).

إن مركبات الشعاع $\vec{A_1}$ هي $\vec{A_1}(x_1, y_1, z_1)$ ومركبات الشعاع $\vec{A_2}$ هي $\vec{A_2}(X_2, Y_2, Z_2)$ فتكون مركبات الشعاع $\Delta\vec{A}$ هي:

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1$$

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1$$



الشكل (1-2)
يمثل فرق شعاعين

ليكن $\Delta t = t_2 - t_1$ فتكون مركبات الشعاع:

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{\vec{A}_2 - \vec{A}_1}{t_2 - t_1}$$

هي:

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} \text{ و } \frac{\Delta Y}{\Delta t} \text{ و } \frac{\Delta Z}{\Delta t}$$

وعندما يتناهى Δt إلى الصفر فإن المركبات السابقة تتناهى إلى المشتقات الجزئية التالية:

$$\frac{dX}{dt} \text{ و } \frac{dY}{dt} \text{ و } \frac{dZ}{dt}$$

نسمي الشعاع الذي يقبل المشتقات الثلاث السابقة مركبات له، مشتق الشعاع $\vec{A}$ ونرمز له بالرمز $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ونكتب العلاقة الشعاعية التالية:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dX}{dt}\vec{i} + \frac{dY}{dt}\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\vec{k} \qquad ((1-10))$$

هذه العلاقة الأخيرة معروفة كثيراً في علم الحركة ونتمكن بواسطتها من تعريف شعاعي السرعة والتسارع، وتدل أيضاً على أن مركبات المشتق هي مشتقات مركبات الشعاع.

1-7 : تدرج تابع للاحداثيات (شعاع التدرج): Gradient

1-7-1 : تعريف التدرج:

لتكن M نقطة ما من الفراغ معينة بواسطة إحداثياتها X, Y, Z على المحاور الاحداثية المتعامدة. وليكن $U(X,Y,Z)$ تابعاً ومستمراً وله مشتقات جزئية في تلك النقطة.

نعين تغير U بجوار النقطة M بالمشتقات الجزئية التالية:

$$\frac{\partial U}{\partial x} , \frac{\partial U}{\partial y} , \frac{\partial U}{\partial z}$$

تسمح بواسطة هذه المشتقات الجزئية من معرفة تغير U عندما ننتقل من M إلى أية نقطة قريبة جداً منها M'.

لنفرض أن مركبات الشعاع:

$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{M}$ هي dz و dy و dx فيكون تغير U هو:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad \text{...((1-12))}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بشكل أبسط بإدخال شعاع مركباته هي:

$$\frac{\partial U}{\partial x} , \frac{\partial U}{\partial y} , \frac{\partial U}{\partial z}$$

يسمى شعاع التدرج، ويرمز له إختصاراً بالرمز grad، وبالتالي فإن عبارة dU الواردة في المعادلة ((1-12)) تكتب على الشكل:

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}\,U} \cdot d\overrightarrow{M} \qquad ((1-13))$$

حيث أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}\,U} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad ((1-14))$$

1-7-2: المدلول الهندسي للتدرج:

لنعتبر سطح السوية المعين بالمعادلة التالية:

$$U(x,y,z) = cte = \text{ثابت}$$

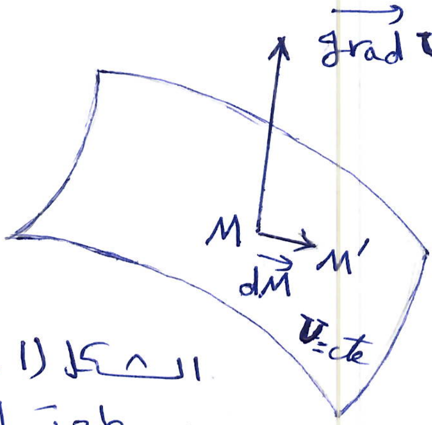
والذي يمر بالنقطة M، ولنعتبر $d\overrightarrow{M}$ انتقالاً صغيراً على هذا السطح، فيكون لدينا من أجل هذا الانتقال $dU=0$ ونجد بالتالي بالاعتماد على العلاقة ((1-13)) أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}\,U} \cdot d\overrightarrow{M} = 0$$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{grad}\,U$ عمودي على الانتقال $\overrightarrow{dM}$ مهما كان صغيراً. لنعتبر انتقالاً آخر عمودياً على سطح السوية المار بـ M بمقدار dM وحاصلاً في اتجاه تزايد U أي أنّ:

$$\overrightarrow{grad}\,U \cdot \overrightarrow{dM} \geq 0$$

وذلك اعتماداً على العلاقة ((1-13)).



الشكل (1 - 3)
سطح تساوي الكمون

ينتج من ذلك أن $\overrightarrow{grad}\,U$ ، $\overrightarrow{dM}$ لهما نفس المنحني ونفس الجهة أيضاً أي أنّ $\overrightarrow{grad}\,U$ هو شعاع موجه باتجاه القيم المتزايدة للتابع U وتصبح قيمته عظمى في هذه الحالة:

$$dU = grad\,U \cdot dM \cdot \cos 0 = grad\,U \cdot dn$$

أي أنّ:

$$grad\,U = \frac{dU}{dn} \qquad ((1-15))$$

وتسمى الكمية $\frac{dU}{dn}$ بالمشتق الناظمي لـ U. وهذا الاتجاه الناظمي يمثل الاتجاه الذي يكون وفق تزايد التابع أعظم ما يمكن.

وتشير العلاقة الأخيرة ((1-15)) على أنّ شعاع التدرج مستقل عن وجود جملة الاحداثيات، وذلك عكس ما توحي به تعريفه ((1-14)).

8-1 : تفرق شعاع: Divergance

لنرمز بـ X و Y و Z لمركبات شعاع الحقل $\vec{A}$ في نقطة M. يطلق اسم تفرق $\vec{A}$ الذي يرمز له اختصاراً بالرمز $div \vec{A}$ على المقدار السلمي:

$$div \vec{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \qquad ((1-16))$$

وبإدخال المؤثر التفاضلي الشعاعي $\vec{\nabla}$ (المسمى نبلا nabla) والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{K} \qquad ((1-17))$$

حيث:

$\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial z}$: هي مركبات المؤثر نبلا $\vec{\nabla}$ على المحاور الإحداثية المتعامدة.

فإننا نكتب علاقة تفرق شعاع ((1-16)) على شكل جداء سلمي:

$$div \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \qquad ((1-18))$$

وكذلك يمكن كتابة علاقة التدرج باستخدام المؤثر $\vec{\nabla}$ على الشكل الآتي:

$$\overrightarrow{grad U} = \vec{\nabla} \cdot U \qquad ((1-19))$$

ومن المهم أن نذكر في عملية ضرب المؤثر بمقدار ما يجب مراعاة احترام ترتيب المضاريب إذ إن المقدار $\vec{\nabla}(V \cdot U)$ مثلاً يختلف عن المقدار $V(\vec{\nabla} \cdot U)$

1-9- دوار حقل شعاعي أو الدوار : Rotational

إن دوار المقدار المتجه هو مقدار متجه، وهو المقدار الثاني الذي يصف تغير الحقل المتجه من نقطة إلى أخرى في الفضاء.

يعرف دوار حقل شعاعي $\vec{A}$ مركباته على المحاور الإحداثية المتعامدة X, Y و Z في نقطة ما M إحداثياتها (x, y, z) بأنه الشعاع، الذي يكتب اختصاراً $\vec{rot}\,\vec{A}$ والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \qquad ((1-20))$$

حيث نحصل على مركبات الدوار من نشر المعين الآتي:

$$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{rot}\,A = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + $$

$$+\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad ((1-21))$$

إذاً دوار شعاع مثل $\vec{A}$ هو عبارة عن شعاع $\vec{B}$ عمودي على المستوى الذي يحوي $\vec{A}$ و $\vec{\nabla}$

2 - يمكن البرهان على صحة المتطابقات التالية

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U.V) = U\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + V\,\mathrm{grad}\,U \qquad ((1-25))$$

$$\mathrm{div}(U.\vec{A}) = U.\,\overrightarrow{\mathrm{div}A} + \vec{A}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U \qquad ((1-26))$$

$$\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = -\vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}B + B.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,A \qquad ((1-27))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,U)} = 0 \qquad ((1-28))$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}A}) = 0 \qquad ((1-29))$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U) = \nabla^2 U \qquad ((1-30))$$

كما نورد بعض العلاقات الخاصة بالمؤثر نبلا :

$$\vec{\nabla}.(U.V) = U(\vec{\nabla}.V) + V(\vec{\nabla}.U) \qquad ((1-31))$$

$$\vec{\nabla}.(U.\vec{A}) = (\vec{\nabla}.U).\vec{A} + U(\vec{\nabla}.\vec{A}) \qquad ((1-32))$$

$$\vec{\nabla}\times(U.\vec{A}) = (\vec{\nabla}.U).\vec{A} + U(\vec{\nabla}.\vec{A}) \qquad ((1-33))$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad ((1-34))$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla}).\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad ((1-35))$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla}).\vec{A} - (\vec{A}.\vec{\nabla}).\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \vec{\nabla}.\vec{B}.(\vec{\nabla}.\vec{A}) \qquad ((1-36))$$

أ ـ 10 : اللابلاسي : « Laplacian »

يطلق اسم اللابلاسي ويرمز له اختصاراً بالرمز ∇^2 أو بالرمز Δ « دلتا » على المقدار التالي ، في جملة الاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ((1-22))$$

الذي يمكن أن يطبق على تابع سلمي فنحصل على مقدار سلمي :

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} U = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \quad ((1-23))$$

أو على حقل شعاعي مركباته X و Y و Z فنحصل على مقدار شعاعي :

$$\overrightarrow{\nabla^2 A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \vec{i}\,\nabla^2 X + \vec{j}\,\nabla^2 Y + \vec{k}\,\nabla^2 Z \quad ((1-24))$$

والذي يسمى اللابلاسي الشعاعي .

أ ـ 11 : بعض القواعد في حساب المؤثرات :

اذا رمزنا بـ op لأي من المؤثرات السابقة فنجد دون صعوبة :

1 ـ إن جميع المؤثرات خطية ، أي أن :

$$op(a+b) = op\,a + op\,b$$

فمثلاً

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}+\vec{B}) = \overrightarrow{rot\,A} + \overrightarrow{rot\,B}$$

$$\vec{\nabla}^2(\vec{A}+\vec{B}) = \overrightarrow{\nabla^2 A} + \overrightarrow{\nabla^2 B}$$

تمرين 1:

برهن صحة العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{grad}(U.V) = U\,\overrightarrow{grad}\,V + V\,\overrightarrow{grad}\,U$$

الحل: نكتب استناداً إلى العلاقة التعريف:

$$\overrightarrow{grad}(U.V) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(U.V) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(U.V) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(U.V)$$

أي أن:

$$\overrightarrow{grad}(U.V) = \vec{i}\left(U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(U\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(U\frac{\partial V}{\partial z} + V\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}(U.V) = U\left(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) + V\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= U.\,\overrightarrow{grad}\,V + V\,\overrightarrow{grad}\,U$$

وهو المطلوب

تمرين 2: لتكن لدينا الأشعة التالية:

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

أوجد (P $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

(B $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

الحل: (P

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$$

ومنه يكون:

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=(-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 7 & 5\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=24\vec{i}+7\vec{j}-5\vec{k}$$

(B

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=-5\vec{j}-5\vec{k}$$

ومنه يكون:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\times(-5\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & -5 & -5\end{vmatrix}=15\vec{i}+15\vec{j}-15\vec{k}$$

ومنه نلاحظ أن:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\neq\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

ملحق المحاضرة الأولى

★ التدرج ((Gradient)) :

في الفيزياء هو مفهوم رياضي يستخدم لوصف معدل تغير كمية فيزيائية قياسية (Scalar field)
مثل (درجة الحرارة ، أو الضغط أو الجهد الكهربائي) من نقطة إلى أخرى في الفضاء.

• التدرج يحدد اتجاه ومقدار أكبر زيادة ممكنة لتلك الكمية

أي أنه يشير إلى الاتجاه الذي تزداد فيه الكمية بأكبر سرعة ويعطي مقدار هذه الزيادة بالنسبة للمسافة.

التعريف الفيزيائي:

التدرج: هو متجه يشير إلى اتجاه الزيادة العظمى لكمية قياسية ، ومقداره يساوي معدل التغير في تلك الكمية بالنسبة للمسافة في هذا الاتجاه.

⊛ في جملة الاحداثيات الديكارتية (Cartesian coordinates) يمكن التعبير عن التدرج رياضياً: إذا كانت الدالة $U = U(x, y, z)$ (التابع مستمر وله مشتقات جزئية)

هذا القانون الأساسي والأبسط للتدرج وهو يعبر عن متجه مكوناته مشتقات جزئية بالنسبة للاحداثيات

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{\nabla} \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}}$$

حيث أن المؤثر نبلا ∇ مركباته في المحاور الاحداثية المتعامدة $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

★★ التفرق ((Divergence)) :

التعريف الفيزيائي:

التفرق: هو مقياس مدى انتشار (أو تجمع) خطوط متجه مجال عند نقطة معينة.

بمعنى آخر: التفرق في نقطة يعبر عن معدل صافي الفيض الخارج من أو الداخل إلى حجم صغير جداً حول تلك النقطة.

• إذا كان التفرق موجباً ← هناك فيض خارج من النقطة (كأنها مصدر).
• 〃 〃 سالباً ← هناك فيض داخل إلى النقطة (كأنها مستقبل)
• إذا كان التفرق صفراً ← الفيض الداخل = الخارج (أي لا يوجد مصدر ولا مستقبل) مثل التدفق في موائع غير قابلة للانضغاط أو في مجال مغناطيسي.

• في حالة الاحداثيات الديكارتية يمكن التعبير عن تفرق شعاع رياضياً كمايلي :

ليكن لدينا متجه مجال عام: $\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$

فإنّ تفرقه ((divergence)) يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

وهذا المقدار كمية قياسية (Scalar) وليس متجهاً.

★★★ دوّار حقل شعاعي أو الدوار Rotational

• التعريف الفيزيائي:

الدوار : هو مقياس لمدى دوران أو التفاف متجه مجال حول نقطة معينة.

أي أنه يصف الخاصية الدورانية للمجال المتجهي في الفضاء.

بعبارة أخرى :

الدوار عند نقطة يعطي محور واتجاه الدوران المحلي للمجال المتجه ومقداره يعبر عن شدة هذا الدوران.

• في حالة الاحداثيات الديكارتية يمكن التعبير عن دوار حقل شعاعي رياضياً كمايلي :

ليكن لدينا متجه مجال $\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$

فإنّ الدوّار يُعرف رياضياً بأنه ناتج الضرب الاتجاهي بين مؤثر التدرج $\vec{\nabla}$ والمتجه $\vec{A}$:

حيث:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\vec{k}$$

وهذا المقدار هو متجه (وليس كمية قياسية مثل التفرق).

*** اللابلاسي «Laplacian»

التعريف الفيزيائي :

اللابلاسي : يُرمز له بـ (∇^2) وهو مؤثر تفاضلي من الدرجة الثانية يُطبق على دالة قياسية أو متجهة ويقيس مدى تغير كمية فيزيائية عن متوسط قيمها حول نقطة معينة.

بصيغة أخرى: اللابلاسي في نقطة يعبّر عن الفرق بين قيمة الدالة عند تلك النقطة ومتوسط قيمها في جوارها الصغير.

• في جملة الاحداثيات الديكارتية يُعطى التعبير عن اللابلاسي رياضياً كما يلي:

1- اذا كانت لدينا دالة قياسية «تابع سلمي»: $U = U(x,y,z)$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U =$$

2- اذا كان لدينا حقل شعاعي «مجال متجه»:

$$\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \vec{i}\, \nabla^2 A_x + \vec{j}\, \nabla^2 A_y + \vec{k}\, \nabla^2 A_z$$

$$= \vec{i}\, \nabla^2 A_x + \vec{j} \cdot \nabla^2 A_y + \vec{k}\, \nabla^2 A_z$$

ويسمى اللابلاسي الشعاعي.