كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

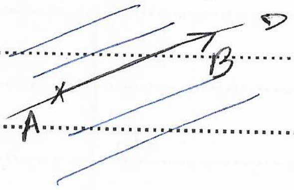
Facebook Group : A to Zمكتبة

المتجهات والعمليات عليها:

تعريف: ندعو كل قطعة مستقيمة موجهة متجهاً $\overrightarrow{AB}$ قطعة مستقيمة موجهة من A إلى B

A: هي بداية المتجه $\overrightarrow{AB}$.

B: هي نهاية المتجه $\overrightarrow{AB}$



- نرمز عادة للمتجه بأحرف لاتينية صغيرة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$

تعريف (2): ترتبط بالمتجه $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ مجموعة عناصر تسمى عناصر المتجه وهي:

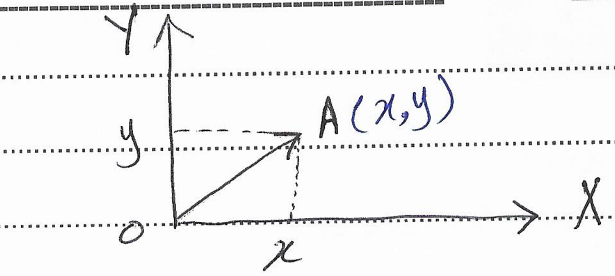
1- الطويلة: وهي طول القطعة المستقيمة التي طرفاها بداية ونهاية المتجه ويرمز لها بأحد الرمزين:

$|\vec{u}|=|\overrightarrow{AB}|$ أو $u=AB$

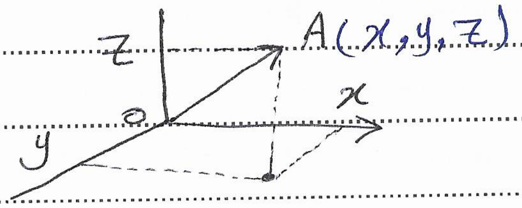
2- الاتجاه (الجهة): وهي جهة الانتقال من بداية إلى نهاية المتجه.

3- المنحى (الحامل): هو مستقيم الذي يحمل المتجه أو أي مستقيم موازٍ له كما أن نقول المنحى الشاقولي أي الموازي للمحور الشاقولي OZ أو المنحى الأفقي أي الموازي للمستوى

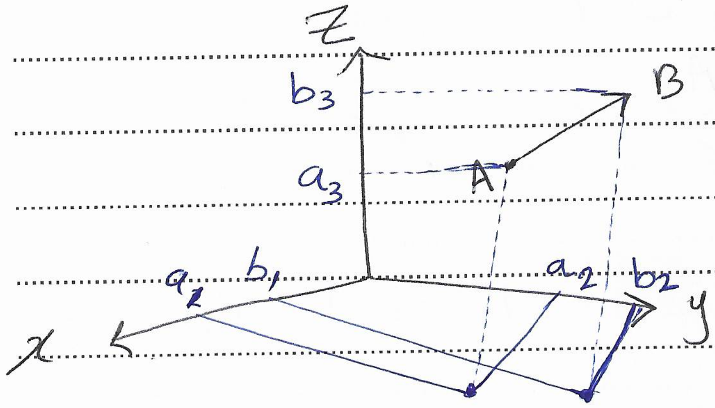
4- نقطة التأثير: بداية المتجه.



$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$A\ (a_1, a_2, a_3)$

$B\ (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$$

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}$$

لحساب الطويلة $|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

تعريف المتجه الصفري: هو المتجه الذي تنطبق بدايته على نهايته ونرمز له بـ $\vec{0}$ وبالتالي عناصره هي:

$|\vec{0}| = 0$ المنحى: اختياري والجهة اختيارية.

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (0,0,0).$$

ملاحظات:

إذا كانت لدينا نقطة $M\ (x, y, z)$ في الفضاء فإننا نجد

مع مبدأ الإحداثيات متجهاً وحيداً بدايته مبدأ الإحداثيات ونهايته

النقطة M ومركباته هي:

$$\vec{OM} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

حيث x, y, z هي مساقط النقطة M على المحاور الثلاث:

$OX\ ,\ OY\ ,\ OZ$

مثال:

$M\ (-1, 0, 3)$ $\quad \vec{OM} = -\vec{i} + 3\vec{k}$

يكون المتجهان $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ $\quad \vec{b}\ (b_1, b_2, b_3)$

متساويان (متساويان) إذا وفقط إذا تحقق:

$$a_1 = b_1 \quad , \quad a_2 = b_2 \quad , \quad a_3 = b_3$$

ومتعاكسان إذا وفقط إذا تحقق:

$$a_1 = -b_1 \quad , \quad a_2 = -b_2 \quad , \quad a_3 = -b_3$$

① جمع متجهين أو أكثر:

نعرف مجموع المتجهين $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ $\quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

بالعلاقة: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$

ونعرف الطرح بالعلاقة:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$-\vec{b} = (-b_1 , -b_2 , -b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3)$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(a_1+b_1+c_1\,,\ a_2+b_2+c_2\,,\ a_3+b_3+c_3)$$

حيث: $\vec{c}=(c_1\,,c_2\,,c_3)$

2) ضرب متجه بعدد حقيقي:

ليكن λ في $\mathbb{R}$ و $\vec{a}$ متجه مركباته $(a_1\,,a_2\,,a_3)$

ينتمي

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1\,,\ \lambda a_2\,,\ \lambda a_3)$$

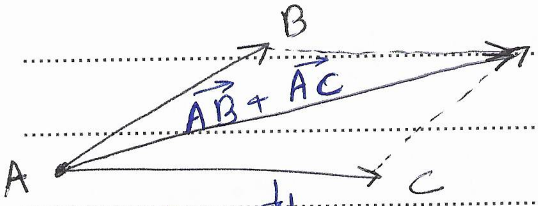
$\vec{m}=\lambda\vec{i}$ متجه

$|\vec{m}|=\lambda$ $\lambda\in\mathbb{R}$ قيمة سلمية

ملاحظة: المتجه يكتب بطريقتين:

$$\vec{b}=(b_1\,,b_2\,,b_3)\overset{\text{أو}}{=}b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

تعريف: إن عمليتي جمع المتجهات والضرب بعدد عمليتان خطيتان وتحققان الخواص:



المجموع هو عبارة متجه

1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

2) $(\lambda+M)\vec{a}=\lambda\vec{a}+M\vec{a}$

3) $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$

4) $\lambda\vec{a}=\vec{a}\iff\lambda=1$

$\lambda\vec{a}=-\vec{a}\iff\lambda=-1$

$\lambda\vec{a}=0\iff\lambda=0$ بفرض $\vec{a}\neq\vec{0}$

الجداء الداخلي (السلمي):

تعريف: الجداء الداخلي لمتجهين هو العدد الذي يساوي جداء طوليهما هذين المتجهين بجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما:

$a(a_1, a_2, a_3)$

$b(b_1, b_2, b_3)$

نرمز لجداء الداخلي للمتجهين بالرمز:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \quad \dots (1)$$

حيث θ هي الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$0 < \theta < \pi$

من العلاقة (1) يمكن حساب الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{و} \quad 0 < \theta < \pi} \quad \dots (2)$$

يمكن حساب الجداء الداخلي من العلاقة التالية:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad \dots (3)$$

مثال: أوجد الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{a}(3,1,0)$, $\vec{b}(2,0,4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\times 2 + 1\times 0 + 0\times 4 = 6$

ملاحظة: الجداء السلمي هو عدد.

لإيجاد الزاوية θ

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+1^2+0^2} = \sqrt{10}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4+0+16} = 2\sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{6}{2\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos\frac{3}{5\sqrt{2}}}$

تحقق الجداء الداخلي للخواص التالية:

① $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

$\vec{a}\,(3, -1, 2)$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = (3)(3) + (-1)(-1) + (2)(2)$

$= 9 + 1 + 4 = 14$

$|\vec{a}|^2 \overset{?}{=} 14$

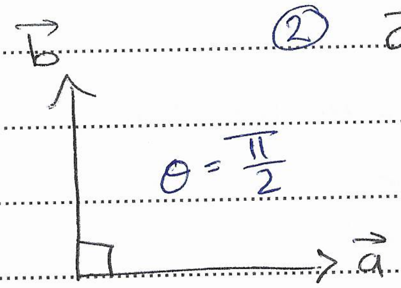
$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$|\vec{a}| = 14 \longleftarrow$

② $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$

الإثبات

② $\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

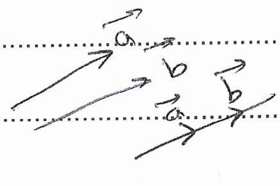


$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = 0$

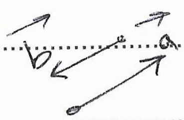
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

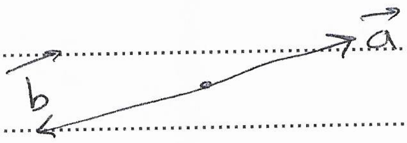
③ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ متوازيين

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \theta = 0$



④ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ متعاكسان





⑤ الجداء الداخلي (السلمي) تبديلي:

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

⑥ $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

مثال: لتكن لدينا المتجهات $\vec{b}(0,1,1)$ $\vec{a}(-1,0,2)$

$\vec{c}(2,0,0)$

أوجد كل من $\vec{a}.\vec{b}$ و $\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})$

الحل: $\vec{a}.\vec{b} = (-1,0,2).(0,1,1) = 0+0+2 = 2$

$$\vec{c}(\vec{a}+\vec{b}) = (2,0,0)\left[(-1,0,2)+(0,1,1)\right]$$

$$= (2,0,0).\left[(-1,1,3)\right] = (2,0,0).(-1,1,3)$$

$$= -2+0+0 = -2$$

$\vec{c}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} = 2$ $\boxed{2.b}$

الجداء الخارجي (المتجهي):

لتكن لدينا المتجهات: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

نرمز للجداء الخارجي بـ $\vec{a}\wedge\vec{b}$ ويحسب بالعلاقة

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال:

$\vec{a}(1,2,0)$ $\quad$ $\vec{b}(1,1,-2)$

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$(2(-2)-0(1))\vec{i} - (-2-0)\vec{j} + (1-2)\vec{k} =$$

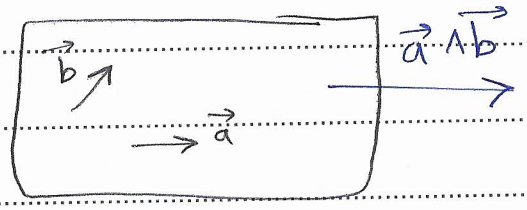
$$-4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$$

أو نحسب بالعلاقة:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin\theta|$$



- أوجد المتجه العمود على كل من المتجهين:

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\quad$ $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$M(0,-3,-3)$$

الجداء المختلط:

يعرف الجداء المختلط بثلاث متجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ بأنه عدد يساوي الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b} \wedge \vec{c}$ ونرمز له بأحد الرمزين:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \overset{\text{أو}}{=} \vec{a}(\vec{b} \wedge \vec{c})$$

ويحسب بالعلاقة:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$$

مثال: أثبت أن النقاط: $A(5, 7, -2)$ $B(3, 1, -1)$ $C(9, 4, -4)$ $D(1, 5, 0)$ تقع في مستوي واحد.

الحل:

$$\vec{AB} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 1\vec{k}$$
$$\vec{AC} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{AD} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$AB , AC , AD = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2(-6-4) + 6(8-8) + 1(-8-12) =$$

$$20 + 0 - 20 = 0$$

النقاط تقع في مستوٍ واحد.