



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : الثانية / عملي

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



الدكتور :

المحاضرة :

الرياضيات / علم



القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

المادة : معادلات تفاضلية

التاريخ : / /

A to Z Library for university services

نقول عن التابع $y = f(x, y)$ انه متجانس إذا تحقق :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

حيث نفرض المتحول $z = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow z = \frac{y}{x}$

$$y' = z + x z'$$

$$y^2 + x^2 y' = x y y'$$

$$y^2 + x^2 y' - x y y' = 0$$

$$y^2 + y' (x^2 - x y) = 0$$

$$y' (x^2 - x y) = -y^2$$

$$y' = \frac{-y^2}{x^2 - x y} \Rightarrow f(x, y) \dots (1)$$

نختار إذا متجانس من الدرجة :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{-\lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 x y} = \frac{-\lambda^2 y^2}{\lambda^2 (x^2 - x y)}$$

$$= \frac{-y^2}{x^2 - x y} = f(x, y)$$

متجانس



$$y = zx \quad \Leftarrow \quad z = \frac{y}{x} \quad \text{نقترح}$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$$

$$z'x + z = \frac{-z^2 x^2}{x^2 - x^2 z}$$

$$z'x + z = \frac{-z^2 x^2}{x^2(1-z)} = \frac{-z^2}{1-z}$$

$$\cancel{z'x} + xz' = \frac{-z^2}{1-z} - z$$

$$xz' = \frac{-z^2 - z + z^2}{1-z} = x \frac{dz}{dx} = \frac{-z}{1-z}$$

$$\Rightarrow x dx = \frac{-z}{1-z} dz$$

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1-z}{-z} dz = \frac{1}{x} dx \quad \frac{-z}{1-z} x \neq 0 \quad \text{نقسم على}$$

$$\left(-\frac{1}{z} + 1\right) dz = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \left(-\frac{1}{z} + 1\right) dz - \frac{1}{x} dx = 0$$

$$\ln z - z + \ln x = \ln c$$

$$\text{نرجع لنعزل } z = \frac{y}{x} \quad \text{نقسم على } x$$

$$\ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} + \ln x = \ln c$$

$$\frac{y}{x} = \ln x + \ln \frac{y}{x} - \ln c$$

$$\frac{y}{x} = \ln \frac{x \cdot \frac{y}{x}}{c} \Rightarrow e^{\frac{y}{x}} = \frac{x \cdot \frac{y}{x}}{c}$$

$$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$$

مثال (2)

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$$

نختار إذا متجانسة

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} \cos \ln \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x} = F(x, y)$$

متجانسة

$$y = Zx \quad \Leftarrow \quad Z = \frac{y}{x} \quad \text{نفرق}$$

$$\Rightarrow y' = Z + xZ'$$

$$Z + xZ' = Z \cos \ln Z$$

$$\Rightarrow xZ' = Z \cos \ln Z - Z \Rightarrow xZ' = Z (\cos \ln Z - 1)$$

$$= x \frac{dZ}{dx} = Z (\cos(\ln Z) - 1)$$

$$\Rightarrow x dZ = Z (\cos \ln Z - 1) dx$$

$x \cdot Z (\cos \ln Z - 1) \neq 0$ (مطلوب)

$$\frac{dZ}{Z(\cos \ln Z - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$dt = \frac{dZ}{Z} \quad \Leftrightarrow \ln Z = t$ (مطلوب)

$$\Rightarrow \frac{dt}{(\cos t - 1)} = \frac{dx}{x} = \frac{dt}{-2\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\cot \frac{t}{2} = \ln x + \ln c$$

$$\cot \frac{\ln Z}{2} = \ln x = \ln c$$

$$\cot \frac{\ln \frac{y}{x}}{2} - \ln x = \ln c$$

$$x y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

مطلوب (3)

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x}$$

نختار إذا متجانسة

$$P(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}}{\lambda x} + \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2 (x^2 - y^2)}}{\lambda x} + \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$= \frac{\lambda \sqrt{x^2 - y^2}}{\lambda x} + \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \frac{y}{x}$$

متجانسة

$$y = Zx \quad \Leftarrow \quad Z = \frac{y}{x} \quad \text{نفرجه}$$

$$y' = Z + xZ'$$

$$Z + xZ' = \frac{\sqrt{x^2 - Z^2 x^2}}{x} + Z$$

$$xZ' = \sqrt{1 - Z^2} \Rightarrow x \frac{dZ}{dx} = \sqrt{1 - Z^2}$$

$$x dZ = \sqrt{1 - Z^2} dx$$

$$x \cdot \sqrt{1 - Z^2} \quad \text{نقسم على}$$

$$\frac{dZ}{\sqrt{1 - Z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\arcsin Z = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{y}{x} = \ln x + \ln c$$

$$(x^2 + y^2) y' = 2xy$$

متجانسة (4)

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2 + y^2)} = f(x, y)$$

متجانسة

$$y = zx \Leftrightarrow z = \frac{y}{x} \text{ افترض}$$

$$y' = z + xz'$$

$$z + xz' = \frac{2x^2z}{(x^2 + z^2x^2)} \Rightarrow z + xz' = \frac{2x^2z}{x^2(1+z^2)}$$

$$z'x = \frac{2z}{1+z^2} - z \Rightarrow xz' = \frac{z - z^3}{1+z^2}$$

$$xz' = \frac{z(1-z^2)}{1+z^2}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{z(1-z^2)}{1+z^2}$$

$$x dz = \frac{z(1-z^2)}{1+z^2} dx$$

$$x \cdot \frac{z(1-z^2)}{1+z^2} \neq 0 \text{ تفصل على } \neq 0$$

$$\frac{1+z^2}{z(1-z^2)} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1+z^2}{z(1-z^2)(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z}$$

$$1+z^2 = A(1-z^2) + Bz(1+z) + Cz(1-z)$$

$$\Rightarrow A = 1 / B = 1 / C = -1$$

$$\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$$

$$\int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z - \ln(1-z) - \ln(1+z) = \ln x$$

$$\ln \left| \frac{z}{(1-z)(1+z)} \right| = \ln |x|$$

$$\ln \left| \frac{\frac{y}{x}}{(1-\frac{y}{x})(1+\frac{y}{x})} \right| = \ln |x| + c$$

$$\ln \left| \frac{y}{x(1-(\frac{y}{x})^2)} \right| = \ln |x| + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x(1-(\frac{y}{x})^2)} = Cx$$