كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تعريف: هي معادلة تحوي تابع أو أكثر لمتحولات مستقلة و مشتقات هذه التوابع.

- تقسم المعادلات التفاضلية إلى قسمين:

1- عادية: فيها تابع أو أكثر لمتحول واحد فقط.

2- جزئية: فيها تابع أو أكثر لمتحولين أو أكثر.

تظهر المشتقات للتوابع هنا بشكل جزئي.

رمز المشتق الجزئي: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$

- رتبة معادلة تفاضلية:

هي مرتبة اشتقاق لأعلى مشتق للتابع (أي مرتبة أعلى مشتق).

- درجة معادلة تفاضلية:

هي أعلى أس مرفوع له أعلى مشتق للتابع.

مثال (1): ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$xy'' - 3xy^{13} + y = 0$$

حدد رتبة هذه المعادلة ثم درجة هذه المعادلة.

الحل: رتبة المعادلة: 2 درجة المعادلة: 1

- حل المعادلات التفاضلية :

نقول $y=f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية إذا حققت المعادلة أثناء تعويضه

أنواع الحلول :

1. الحل العام : إذا كان لدينا معادلة تفاضلية

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \dots (1)$$

فإن الحل العام هو علاقة $y=f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ تحقق المعادلة التفاضلية (1).

2. الحل الخاص : نحصل على الحل الخاص من صيغة الحل العام بإعطاء الثوابت قيم اختيارية بما فيها $\pm\infty$

3. الحل الشاذ : هو حل للمعادلة (1) ولكن لا ينتج من صيغة الحل العام

4. التكامل العام : هو عبارة عن علاقة بين y و x كما في الشكل الآتي :

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

تحقق المعادلة (1).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (2): معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية حل العام $y'' + y = 0$ حل خاص لأنه نتج عن $y = \cos x$ و $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

صيغة العام بوضع: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$

- تشكيل معادلات تفاضلية انطلاقاً من علاقة جبرية:

لتكن لدينا (2) $f(x, y, c) = 0$ فيها x متحول مستقل و y تابع له وتحوي أيضاً c ثابتاً اختيارياً وعدد يؤدي هنا أن يمكن الحصول على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ونشتق (2)

$$\Leftarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \quad \ldots (3)$$

حيث نحذف من (2) و (3) الثابت c

مثال (3): لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التي حل العام هو (3)

$$y^2 = 2cx + c \quad \ldots (3)$$

الحل: الاشتقاق على الشكل الآتي مرة واحدة:

$$2yy' = 2c$$

$$yy' = c \quad \ldots (4)$$

نعوض (4) في (3) نجد:

$$y^2 = 2yy'x + yy' \quad (\div y)$$

$$\Rightarrow y = 2y'x + y'$$

$\Leftarrow$ معادلة من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (4):

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ..... (5)

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو (5)

الحل: نشتق مرتين:

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ ..... (6)

$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ ..... (7)

نجمع (5) و (7) نكتب:

$y + y'' = 0$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى.

- المعادلات من المرتبة الأولى:

تقسم إلى قسمين: 1- معادلات محلولة للمشتق

2- معادلات غير محلولة للمشتق

أ) المعادلات المحلولة للمشتق:

إن شكل كل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى هو $F(x, y, y') = 0$

أما المحلولة للمشتق فهي $y' = f(x, y)$

قد تظهر بالشكل: $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

P - متفصلة المتحولات:

شكلها العام: $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$

نكامل مباشرة لنحصل على تكامل العام.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (5): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x\,dx + (y+1)\,dy = 0$$

الحل: بفصل المتحولات نكامل مباشرة:

$$\int x\,dx + \int (y+1)\,dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = 0$$

ب. المعادلات التي ترد إلى مفصلة المتحولات:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

ويمكن أن نجزئ:

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0$$

بالقسمة على $N_1(x).M_2(y) \neq 0$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0 \Leftarrow$$

وهي مفصلة المتحولات.

ملاحظة: حل المعادلة $N_1(x) = 0$ ، $M_2(y)$ يعطي حلول شاذة.

مثال (6):

$$(x^2+1)(y^2-1)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

حل المعادلة. أوجد الحل العام للمعادلة.

الحل: نقسم على $(y^2-1)x$

$$\frac{x^2+1}{x}\,dx + \frac{2y}{y^2-1}\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)dx + \frac{2y}{(y^2-1)}\,dy = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\frac{2y}{(y^2-1)}dy=0$$

نكامل:

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}+\ln|x|+\ln(y^2-1)=0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z