كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الثانية**

المادة : اهتزازات وامواج

المحاضرة : الاولى والثانية/نظري/تنزيل دكتورة

المحاضرة الأولى والثانية لمقرر الاهتزازات والأمواج لطلاب السنة الثانية - د. سمر عمران

الحركات الاهتزازية

مقدمة: تُعد دراسة الحركات الاهتزازية التي تقوم بها الجمل الميكانيكية أحد أهم ميادين الدراسات الفيزيائية. إنَّ معظم هذه الجمل تملك القدرة على الاهتزاز بشكل حر وبطرق متعددة، ولبيان مدى شيوع الحركات الاهتزازية نمعن النظر في جسم الإنسان لنرى أنَّ كل شيء فيه يهتز، فالقلب ينبض بصورة دورية، والرئتان تهتزان وفق آلية الشهيق والزفير، وغشاء الطبل في الأذن يهتز فتترجم اهتزازاته إلى إحساس سمعي، وتهتز الحبال الصوتية فتسبب باهتزازها إمكانية النطق، وكذلك الذرات في أجسامنا في حالة اهتزاز دائم.

1- الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

تعتبر الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة الحركة الأكثر أهمية من جميع الحركات الاهتزازية، نظراً لبساطتها من جهة، ولأنها تشكل تمثيلاً كافياً من حيث الدقة لكثير من الحركات الاهتزازية التي نصادفها في الطبيعة من جهة أخرى.

1-1: التمثيل الرياضي للحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

نُعرّف هذه الحركة بأنها أبسط حركة لجسيم يتحرك في حركة اهتزازية دورية (تكرر نفسها) في خط مستقيم. يمكننا القول عن حركة جسيم ما يتحرك على طول المحور X إنها حركة جيبية بسيطة أو توافقية إذا كان انتقال الجسيم x مقدراً من مبدأ الاحداثيات مُعطى بدلالة الزمن بالعلاقة التالية:

$$x = A\cos(wt + \varphi) \qquad (1)$$

حيث: A: سعة الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة، $(wt + \varphi)$: الطور، φ: الطور البدئي (أي قيمة الطور من أجل t=0). نشير هنا إلى أنّنا عرفنا الحركة الحركة الجيبية البسيطة بدلالة جيب التمام cos إلا أنّه يمكننا تعريفها أيضاً بدلالة الجيب sin. الفارق الوحيد بين الصيغتين هو فرق في الطور البدئي مقداره $\frac{\pi}{2}$. ويتكرر تابع cos عند ازدياد الزاوية بمقدار 2π أي يتكرر انتقال الجسيم بعد فاصل زمني قدره $\frac{2\pi}{w}$. وبالتالي فإنَّ الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة دورية ودورها $T = \frac{2\pi}{w}$ ، أمّا تواتر الحركة الاهتزازية الجيبية فيساوي عدد الاهتزازات الكاملة في واحدة الزمن $\nu = \frac{1}{T}$. وتسمى الكمية w النبض أو التواتر الزاوي وهو يرتبط مع كل من دور وتواتر الحركة الاهتزازية ويُقاس بالـ (Rad/s) بالعلاقة:

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (2)$$

1-2: السرعة والتسارع في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

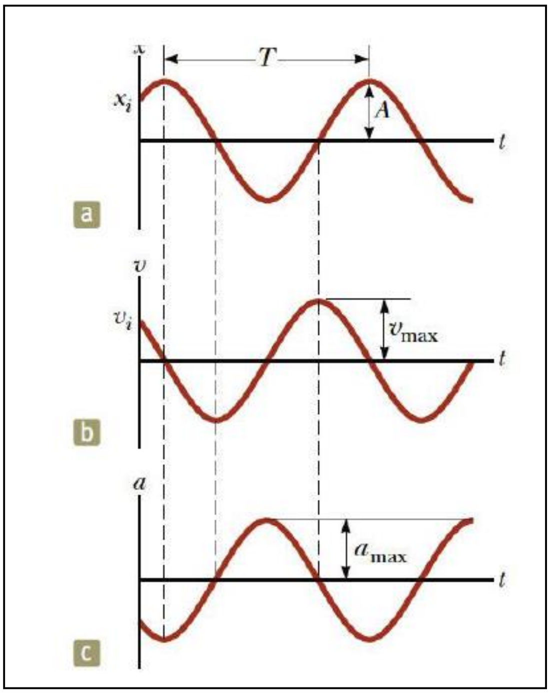
يمكن الحصول على عبارتي السرعة والتسارع في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة بأخذ المشتق الأول والثاني للمعادلة (1) بالنسبة للزمن، فنحصل على:

$$v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt + \varphi) \qquad (3)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -w^2A\cos(wt + \varphi) = -w^2x \qquad (4)$$

يتضح من الشكل (1) أنَّ إضافة زاوية موجبة مقدارها $\frac{\pi}{2}$ إلى طور تابع الجيب تحوله إلى تابع جيب التمام وهذا يعني أنَّ السرعة $v = \frac{dx}{dt} = -wA\cos(wt)$ متقدمة على الانتقال بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وأنَّ نهايتها العظمى والصغرى تسبقان الانتقال بمقدار ربع الدور $\frac{T}{4}$.

وبعبارة أخرى تكون السرعة عظمى عندما ينعدم الانتقال $x = 0$، أمّا التسارع فيتغير بشكل معاكس تماماً للانتقال (حيث فرق الطور بينه وبين الانتقال يساوي $\pi\ Rad$) فهو يبلغ قيمته الأعظمية الموجبة والسالبة وبالعكس كما في الشكل (1).



الشكل(1): المنحنيات البيانية لتغير الانتقال a والسرعة b والتسارع c.

يتحدد موضع الجسيم في أية لحظة بما فيها لحظة البدء $(t = 0)$ إذا تمكنا من معرفة انتقال الجسيم x وسرعته v.

نرمز لهاتين القيمتين في اللحظة $(t = 0)$ بالرمزين x_0 و v_0 على الترتيب. عندئذ من المعادلتين (1 و3) نكتب:

$$x_0 = A\cos(\varphi)\ ,\ v_0 = -wA\sin(\varphi) \qquad ; \quad t = 0 \qquad (5)$$

انطلاقاً من المعادلة السابقة نجد:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} \quad , \quad \tan\varphi = -\left(\frac{v_0}{wx_0}\right) \qquad (6)$$

نلاحظ من المعادلتين (5) و(6) أنّهُ يمكن حساب السعة A والطور البدئي φ بدلالة كل من الانزياح البدئي x_0 والسرعة الابتدائية v_0.

مسألة: يُعطى الانتقال الآني لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة بالمعادلة: $x = 12\sin\left[\left(\frac{2\pi}{10}\right)t + \frac{\pi}{4}\right]$ حيث x تُقدر بالسنتيمتر . والمطلوب: حساب مايلي:

1- السعة، 2- التردد، 3- الدور ، 4- زاوية الطور البدئي، 5- زاوية الطور في اللحظة $t = 5sec$، 6- فرق الطور بين موضعين للجسيم يفصلهما فترة زمنية قدرها 15sec، 7- الانتقال والسرعة والتسارع في اللحظة $t = 1.25sec$، 8- النهاية العظمى للانتقال والسرعة والتسارع.

الحل: من نص المسألة لدينا الانتقال الآني للجسيم يُعطى بالعلاقة:

$$x = 12\sin\left[\left(\frac{2\pi}{10}\right)t + \frac{\pi}{4}\right] \qquad (1)$$

ولدينا من المعادلة التي تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة:

$$x = A\sin(wt + \varphi) \qquad (2)$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2)، نجد:

1- السعة تساوي: $A = 12cm$.

2- التواتر الزاوي يساوي: $w = \frac{2\pi}{10}$، ومن العلاقة بين التواتر الزاوي والتواتر الخطي (التردد) لدينا:

$$w = 2\pi\nu \;\Rightarrow\; \nu = \frac{w}{2\pi} = 0.1Hz$$

3- الدور : $T = \frac{1}{\nu} = 10sec$

4- إنَّ زاوية طور الحركة هي $(wt + \varphi)$، وزاوية الطور البدئي نحصل عليها بوضع $t = 0$، أي أنَّ الطور البدئي يساوي إلى: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

5- طور الحركة في اللحظة $t = 5sec$ يساوي:

$$(wt + \varphi) = \left(\frac{2\pi}{10}\right)5 + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

6- طور الحركة في اللحظة $t = 0$ يساوي: $\frac{\pi}{4}$، وطور الحركة في اللحظة $t = 15sec$ يساوي:

$$(wt + \varphi) = \left(\frac{2\pi}{10}\right)15 + \frac{\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

وعليه فرق الطور بين الموضعين هو الفرق بين الزاويتين ويساوي 3π

7- الانتقال x في اللحظة $t = 1.25sec$ يساوي:

$$x = 12\sin\left[\left(\frac{2\pi}{10}\right)1.25 + \frac{\pi}{4}\right] = 12\ cm$$

السرعة في اللحظة $t = 1.25sec$ تساوي وفقاً للعلاقة (3):

$$v = \frac{dx}{dt} = 12\left(\frac{2\pi}{10}\right)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{10}\times 1.25\right)+\frac{\pi}{4}\right] = 0$$

مما يشير إلى أنَّ انتقال الجسيم في هذه اللحظة يكون في نهايته العظمى لأن سرعة الجسيم معدومة.

التسارع في اللحظة $t = 1.25sec$ يساوي وفقاً للعاقة (4):

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 A\sin(wt+\varphi) = -w^2x = -\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 \times 12 = -4.73\ cm/sec^2$$

إشارة السالب تعني أنَّ اتجاه التسارع يعاكس اتجاه الانتقال، أي التسارع يتجه نحو موضع التوازن.

8- النهاية العظمى للانتقال تحدث عندما: $\sin\left[\left(\frac{2\pi}{10}\right)t+\frac{\pi}{4}\right] = 1$ وهذا يعني أنَّ أقصى انتقال لـ x يساوي قيمة السعة $12\ cm$.

النهاية العظمى للسرعة تحدث عندما: $\cos\left[\left(\frac{2\pi}{10}\right)t+\frac{\pi}{4}\right] = 1$ وتساوي $v = 12\left(\frac{2\pi}{10}\right) = 7.53\,cm/sec$، وهذه السرعة تحدث عندما يكون الجسيم في مركز التوازن، أي عندما $x = 0$.

النهاية العظمى للتسارع تحدث عندما: $\sin\left[\left(\frac{2\pi}{10}\right)t+\frac{\pi}{4}\right] = 1$ وتساوي $a = -12\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 = -4.73\ cm/sec^2$.

1-3: القوة في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

يمكننا باستخدام المعادلة (4) من حساب القوة التي تؤثر على جسيم كتلته m لتجعله يهتز بحركة اهتزازية جيبية. بتطبيق قانون نيوتن الأساسي في التحريك $F = ma$ وتعويض نتيجة المعادلة (4) التي تعطي التسارع، نجد أنَّ:

$$F = -mw^2x = -Kx \qquad (7)$$

حيث فرضنا أنَّ: $K = mw^2 \quad or \quad w = \sqrt{K/m}$

تسمى الثابتة K أحياناً ثابت المرونة، وهي تمثل القوة اللازمة لتحريك جسيم ما بمقدار واحدة الطول. وتبين المعادلة (7) أنَّ القوة في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة تتناسب دوماً مع الانتقال ومعاكسة له، وتتجه دوماً نحو المبدأ O الذي يمثل موضع التوازن $F = 0$ عندما $x = 0$. يمكن القول هنا أنَّ القوة جاذبة وأنَّ مركز الجذب هو النقطة O، وتمثل تلك القوة نموذجاً للقوة التي تظهر عند تشوه جسم مرن (كالنابض). يمكننا كتابة دور وتواتر الحركة الاهتزازية بدلالة كتلة الجسيم المهتز وثابت المرونة للقوة المطبقة بالعلاقتين:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K/m}} = 2\pi\sqrt{m/K} \qquad (8)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{K/m} \qquad (9)$$

1–4: الطاقة في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

1–4–1: الطاقة الحركية في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

نعلم أنَّ الطاقة الحركية E_{k} لجسيم كتلته m ويتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة التالية:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2w^2sin^2(wt+\varphi) \qquad (10)$$

وباستخدام العلاقة (1) والاستفادة من المطابقة $(sin^2\theta + cos^2\theta = 1)$ يمكننا كتابة عبارة الطاقة الحركية للجسيم بالصيغة التالية:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2w^2[1-cos^2(wt+\varphi)]$$

$$= \frac{1}{2}mw^2[A^2 - x^2] \qquad (11)$$

نلاحظ من العلاقة (11) أنَّ الطاقة الحركية للجسيم المهتز تأخذ قيمة عظمى في مركز الاهتزاز $x = 0$ وقيمة صغرى عند نهايتي الاهتزاز والقيمة العظمى للطاقة الحركية تساوي إلى:

$$E_{k(\max)} = \frac{1}{2}mA^2w^2 \qquad (12)$$

2–4–1: الطاقة الكامنة في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

من أجل الحصول على الطاقة الكامنة E_{p} نطبق العلاقة $F = -\,dE_p/dx$ ونستخدم المعادلة (7) نحصل على:

$$dE_p/dx = Kx \qquad (13)$$

بمكاملة المعادلة (13) معتبرين الطاقة الكامنة في المبدأ معدومة نحصل على:

$$\int_0^x dE_p = \int_0^x Kxdx \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}mw^2x^2 \qquad (14)$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أنَّ الطاقة الكامنة تساوي الصفر في مركز الاهتزاز $x = 0$ وتزداد قيمتها كلما اقترب الجسيم من نهايتي الاهتزاز $x = \pm A$ والقيمة العظمى للطاقة الكامنة تساوي:

$$E_{p(\max)} = \frac{1}{2}mA^2w^2 \qquad (15)$$

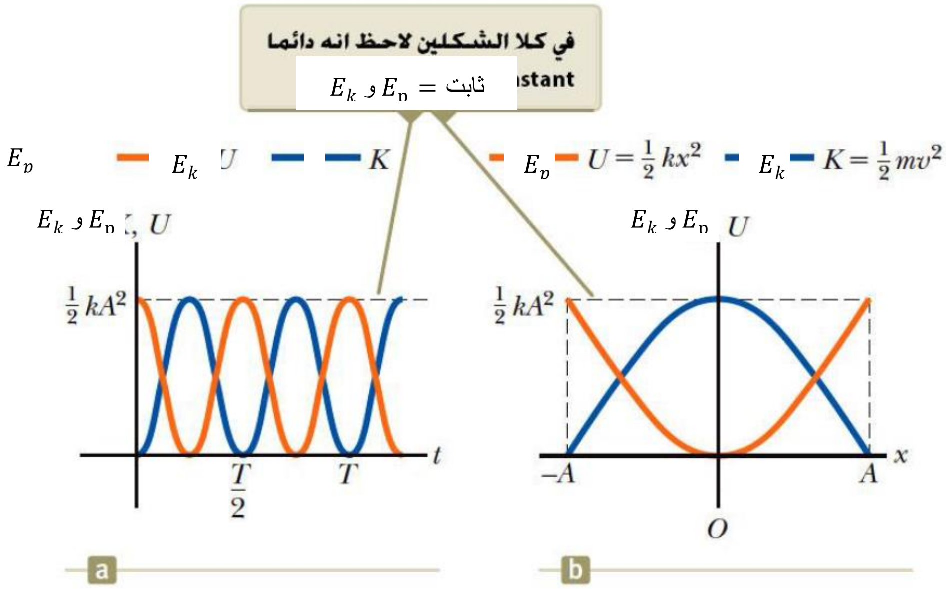
نلاحظ من المعادلتين (12) و (15) أنَّ القيمتان الأعظميتان للطاقتين الحركية والكامنة متساويين، ومن هنا نستنتج أنَّ التحول التام للطاقة من أحد شكليها إلى الشكل الأخر.

1-4-3: الطاقة الكلية في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

يُعبر عن الطاقة الكلية في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة في أية لحظة زمنية أو من أجل أية قيمة للإزاحة بالعبارة التالية:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mw^2[A^2 - x^2] + \frac{1}{2}mw^2x^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2 = \frac{1}{2}KA^2 = cet \quad (16)$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أنَّ الطاقة الكلية مقدار ثابت وهذا ما كان متوقعاً لأن القوة تُشتق من كمون، وعليه يمكننا القول أنّهُ خلال اهتزازة واحدة يجري تبادل مستمر بين الطاقة الكامنة والطاقة الحركية. فعندما يبتعد الجسيم عن موضع توازنه تزداد طاقته الكامنة على حساب طاقة الحركية، ويحصل العكس عند عودة الجسيم باتجاه موضع التوازن.



الشكل(2): العلاقة بين الطاقة الكامنة والطاقة الحركية في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة.

1-5: تركيب الحركات الاهتزازية الجيبية البسيطة:

هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء تُجمع فيها حركتان جيبيتان (توافقيتان) بسيطتان أو أكثر في آن واحد، وقد يكون تأثير هذه الحركات في الجسم وفق خط مستقيم أو وفق خطين مستقيمين متعامدين أو في أي منحني أخر. ونظراً لكون المعادلات التي تصف معظم الحركات الاهتزازية المختلفة التي سندرسها هي معادلات تفاضلية خطية فيمكن أن نطبق عليها مبدأ التراكب الذي ينص على أنَّهُ يمكن لحركتين اهتزازيتين (أو أكثر) أن تحدثا في نفس النقطة دون أن تؤثر إحداهما على الأخرى، فهو طريقة يتم فيها الجمع الجبري للإزاحات (للسعات) لموجتين أو أكثر للحصول على الموجة الناتجة ، ويُطبق هذا المبدأ على جميع أنواع الموجات الميكانيكية والكهرومغناطيسية، ولا يُطبق من أجل المعادلة اللاخطية، أبسط تطبيق على مبدأ التراكب هو حركة بندول بسيط.

1-5-1: تركيب حركتين اهتزازيتين جيبيتين بسيطتين لهما نفس المنحى والتواتر الزاوي:

نفرض أنَّ لدينا جسماً يخضع آنياً لحركتين اهتزازيتين جيبيتين بسيطتين لهما نفس التواتر الزاوي على امتداد المحور x. إنَّ محصلة هاتين الحركتين عبارة عن تابع توافقي بسيط له تواتر زاوي يساوي التواتر المشترك للحركتين. إنَّ عملية إيجاد المحصلة تمثل في الواقع عملية جمع متجهاتها. فإذا كان تابعا الحركتين على الشكل:

$$x_1 = OP_1 = A_1 \cos(wt + \varphi_1) , x_2 = OP_2 = A_2 \cos(wt + \varphi_2) \qquad (17)$$

وقد عبرنا عنهما بيانياً باستخدام المتجهين $\overrightarrow{OP_1}$ و $\overrightarrow{OP_2}$ كما في الشكل (3)، وقمنا بإيجاد المحصلة وفق قاعدة جمع المتجهات، ونلاحظ أنَّ مسقط المحصلة على المحور x يساوي مجموع مسقطي المركبتين على هذا المحور، ونعبر عنه بالمعادلتين:

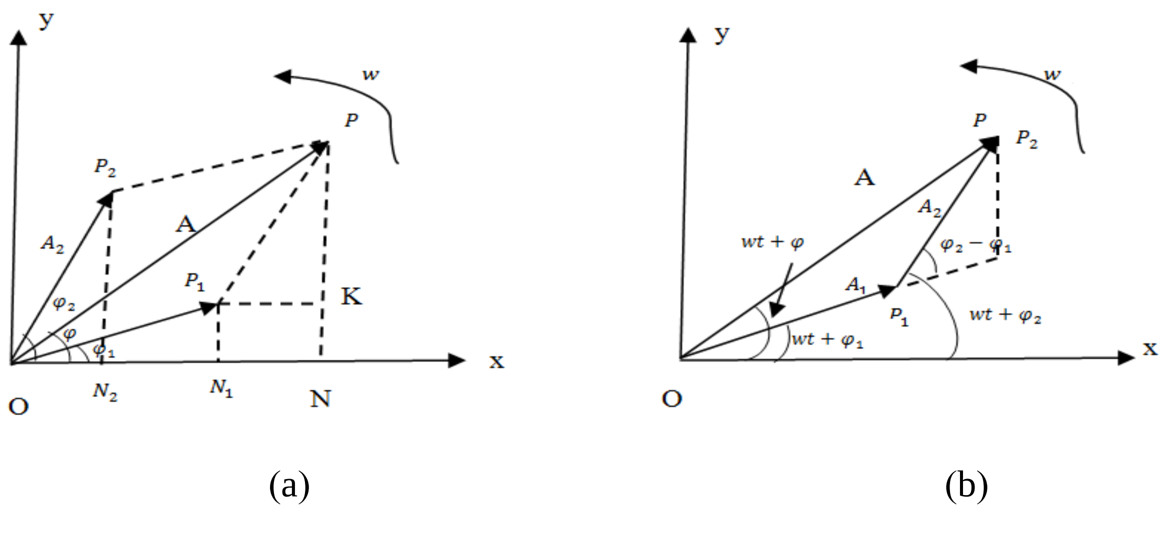
$$X = OP_1 + OP_2 = X_1 + X_2 \quad , \quad X = A\cos(wt + \varphi)$$

تُعطى سعة الحركة المحصلة A بالعلاقة التالية:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (18)$$

ويتم تعيين طور الانتقال (الإزاحة) بالعلاقة:

$$\tan\varphi = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \qquad (19)$$



الشكل(3): تركيب حركتين اهتزازيتين جيبيتين بسيطتين لهما نفس المنحى والتواتر الزاوي.

نشير هنا إلى انَّ استخدام التمثيل العقدي يسمح لنا بحساب سعة الحركة الاهتزازية المحصلة A بشكل مباشر. يُعرّف المتجهين $\overrightarrow{OP_1}$ و $\overrightarrow{OP_2}$ بالعددين العقديين:

$$Z_1 = A_1 e^{(wt+\varphi_1)} \quad , \quad Z_2 = A_2 e^{(wt+\varphi_2)} \qquad (20)$$

وبالتالي يُعرّف المتجه المحصل $\overrightarrow{OP}$ بالعدد العقدي $Z = Z_1 + Z_2$، ومنهُ:

$$Z = A_1 e^{i(wt+\varphi_1)} + A_2 e^{i(wt+\varphi_2)} \qquad (21)$$

ولحساب طويلة العدد العقدي Z نضرب العدد العقدي ذاته بمرافقه، نجد:

$$ZZ^* = A^2 = \left[A_1 e^{i(wt+\varphi_1)} + A_2 e^{i(wt+\varphi_2)}\right].\left[A_1 e^{-i(wt+\varphi_1)} + A_2 e^{-i(wt+\varphi_2)}\right]$$

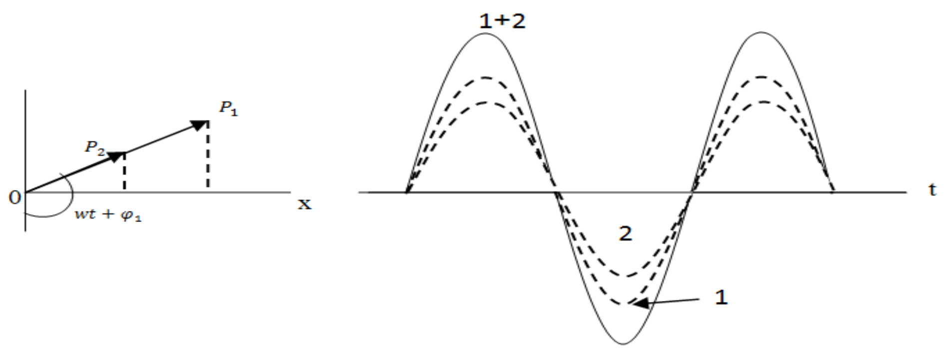
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (22)$$

هذه العلاقة مطابقة للعلاقة (18)، نميز هنا ثلاث حالات خاصة هامة:

1- إذا كانت $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ أو $\varphi_2 = \varphi_1$ نقول في هذه الحالة أنَّ الحركتان متفقتان في الطور ويكون متجها دوران الحركة الأولى والحركة الثانية متوازيين وفي الاتجاه نفسه وتكون سعة الحركة الاهتزازية المحصلة الناتجة من المعادلة (18) مساوية:

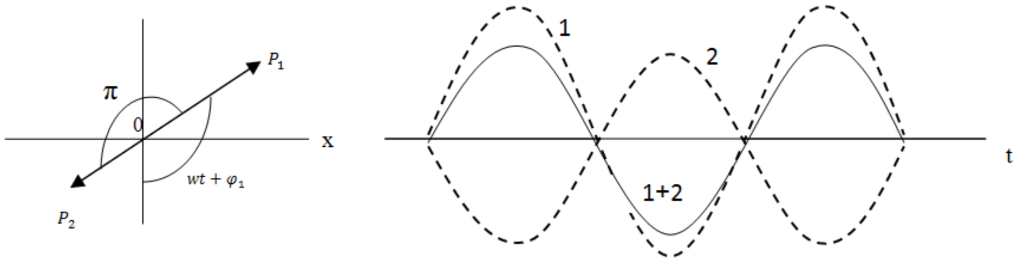
$$A = A_1 + A_2 \qquad (23)$$

وبالتالي تتداخل الحركتان الاهتزازيتان تداخلاً بناءً لأن سعتهما تُجمعان جمعاً كما يبدو في الشكل (4)، وبالتالي نحصل على هدب مضيء وهذا ما سنجده في فصل الضوء.



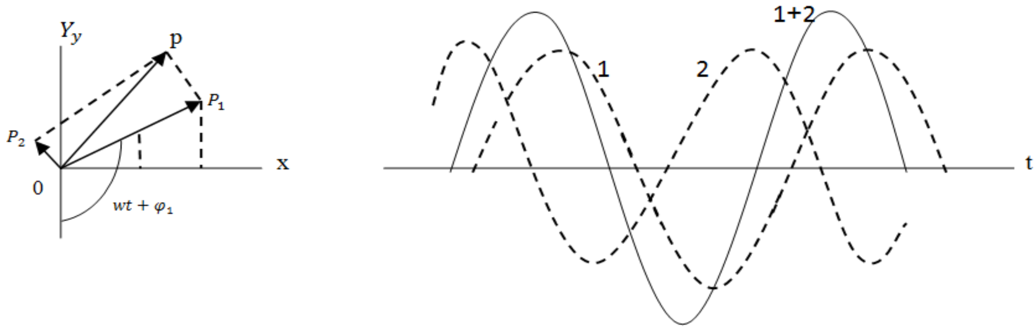
الشكل(4): تراكب حركتين اهتزازيتين بسيطتين متفقتين بالطور.

2- إذا كانت $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ أي $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ نقول في هذه الحالة أنَّ الحركتان متعاكستان في الطور ويكون متجها دوران الحركة الأولى والحركة الثانية متوازيين ومتعاكسين وتكون سعة الحركة الاهتزازية المحصلة إذا كانت $(A_2 > A_1)$ الناتجة من المعادلة (18) مساوية: $A = A_2 - A_1$، حيث افترضنا أنَّ $\varphi = \varphi_1$، وبالتالي تتداخل الحركتان الاهتزازيتان تداخلاً هدّاماً لأن سعتهما تُطرحان من بعضهما كما يبدو في الشكل (5)، ونحصل على هدب مظلم وهذا ما سنجده في فصل الضوء، وإذا كانت $(A_2 = A_1)$ ينعدم الاهتزاز.



الشكل(5): تراكب حركتين اهتزازيتين بسيطتين متعاكستين بالطور.

3- إذا كانت $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ أي $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ نقول في هذه الحالة أنَّ الحركتان الاهتزازيتان على ترابع. نحصل عندئذ بتطبيق المعادلة (18) على سعة الحركة الاهتزازية المحصلة، فنجد: $A^2 = A_1^2 + A_2^2$، ويكون متجها دوران الحركتين الاهتزازيتين الأولى والثانية في هذه الحالة متعامدين.



الشكل(6): تراكب حركتين اهتزازيتين جيبيتين على ترابع.

4- إذا كانت سعة الحركة الاهتزازية الأولى مساوية سعة الحركة الاهتزازية الثانية، أي $(A_1 = A_2)$، فإنَّ المعادلة (18) تُكتب بالشكل التالي:

$$A^2 = 2A_1^2[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]\ , \qquad A^2 = 4A_1^2\cos^2[(\varphi_2 - \varphi_1)/2]$$

توضيح للمعادلة الأخيرة:

$$A_1 = A_2 \quad \Longrightarrow A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 2A_1^2 + 2A_1^2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$= 2A_1^2[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = 4A_1^2\ \cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$