كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الثانية**

المادة : الكيمياء الكمومية

المحاضرة : الاولى/نظري/

الفصل الأول

الأمواج التقليدية ونشوء الميكانيك الكمومي

Classical Waves and Evolution of Quantum Mechanics

1-1 مقدمة Introduction

كانت قوانين الفيزياء التقليدية قادرة حتى بداية القرن التاسع عشر على شرح الظواهر العلمية المعروفة في عالم الأجسام الجهرية (الماكروسكوبي)، ولدراسة الأجسام المجهرية، مثل الذرات، والجزيئات، ومكوناتها من بروتونات وإلكترونات، كان من الضروري على العلماء دراسة ديناميك هذه الأجسام انطلاقاً من منظار آخر جديد. لقد حاول العلماء تطبيق قوانين الفيزياء التقليدية لشرح بعض الظواهر العلمية المرتبطة بحركة الذرات والجزيئات ومكوناتها، ولكن أكدت الدلالات العلمية المتراكمة على عجز قوانين الفيزياء التقليدية عن تعليل سلوك الأجسام المجهرية وشرحها، مما تطلب التفكير بوضع نظرية جديدة.

لقد استلزم استكمال وضع نظرية جديدة قادرة على تفسير سلوك الأجسام المجهرية (الميكروسكوبية) ووصفها أكثر من ربع قرن من العمل المتواصل. فضلا عن ذلك، جاءت النظرية الجديدة بعد أن أظهرت العديد من النتائج التجريبية فشل الفيزياء التقليدية في مجال دراسة بنية المادة على المستوى المجهري. فقام العلماء، مثل ماكس بلانك، وبورن، وديراك، وهايزنبرغ، وشرودينغر، ولوي ديبروغلي، بصياغة فيزياء جديدة سميت الفيزياء الكمومية، وتجدر الإشارة إلى أن هذه الصياغة هي الأساس الذي يمكن تطبيقه على الأجسام الجهرية والمجهرية، وليس الفيزياء

التقليدية إلا تقريباً من تقريبات النظرية العامة لميكانيك الكم، وأن الكيمياء الكمومية هي ذلك الفرع المهم من الكيمياء الذي يطبق نظرية الكم في شتى مجالات الكيمياء، والهدف الأساسي للكيمياء الكمومية هو الإجابة على السؤال "لماذا يحدث التغير الكيميائي"؟ وأصبح اعتماد جميع فروع الكيمياء على ميكانيك الكم أساسياً وضرورياً لشرح نتائج التجارب العملية المختلفة وفهمها.

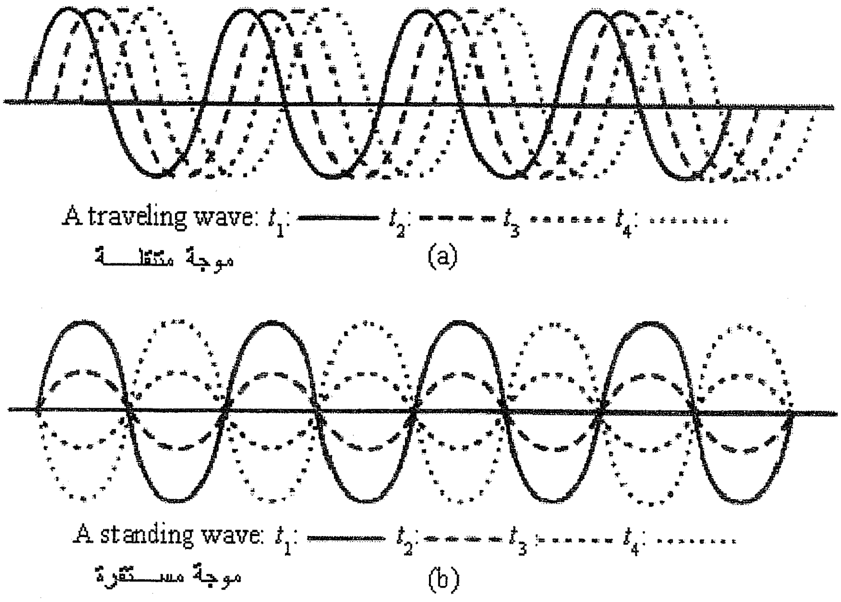
سنقدم في هذا الفصل مجموعة ظواهر علمية، وتجارب علمية عجز الميكانيك التقليدي عن شرح نتائجها وتعليلها، وسنبين كيف كان ظهور ميكانيك الكم حتمياً ولازماً لفهم هذه التجارب.

سنتعلم كيف نفكر في الظواهر الذرية وما دون الذرية بأسلوب مختلف عن ذلك الذي اعتدنا استعماله في حالة الأجسام الكبيرة، ولكن قبل ذلك سنعرض دراسة موجزة للحركات الاهتزازية والأمواج مستندين إلى مبادئ الميكانيك التقليدي.

1-2 الأمواج Waves

يوجد نمطان أساسيان للأمواج: الأمواج المتحركة والأمواج المستقرة؛ إذ تكون الأمواج المتحركة متوالدة، مثل الأمواج على سطح الماء، أما الأمواج المستقرة، مثل الحركة الاهتزازية لسلك مشدود (كما في آلة الكمان)، فإنها لا تتوالد، وتحوي عقد وبطون، ويوضح الشكل (1-1) أشكال الأمواج المتحركة والمستقرة، وقبل دراسة هذه الأمواج، سنتعرف على بعض المصطلحات الخاصة بالأمواج.

تدعى منطقة الإزاحة الموجبة النقطة العليا (أو القمة أو البطن)، في حين تدعى منطقة الإزاحة السالبة النقطة الدنيا (النهاية الصغرى أو البطن أيضاً)، ويدعى الوضع الذي تكون عنده إزاحة الموجة مساوية الصفر العقدة. تمثل معظم الأمواج أمواجاً دورية متمتعة بعدد من القمم والنهايات الصغرى بالأشكال نفسها، وتدعى المسافة بين قمتين متجاورتين طول الموجة، ويرمز له بالرمز λ، في حين يمثل دور الموجة الزمن اللازم لعودة الجسم المهتز إلى الحالة البدائية، أما التواتر، فهو عكس الدور، فيمثل عدد الاهتزازات خلال واحدة الزمن، وتكون الموجة أصلاً غير متمركزة (أي لا يمكن أن تبدو عند نقطة وحيدة في الفراغ).



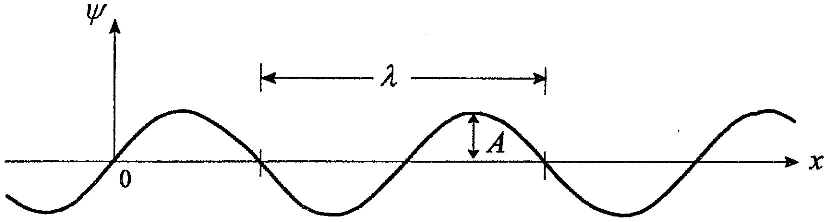
الشكل (1-1): (a) الموجة المتنقلة عند أزمنة مختلفة؛ إذ تتحرك عقد الموجة المتنقلة على امتداد المحور (من اليسار إلى اليمين). (b) الموجة المستقرة عند الأزمنة نفسها. تبقى عقد الموجة المستقرة عند مواضعها المثبتة.

1-2-1 الأمواج المتنقلة Traveling Waves

إن أبسط الحركات الاهتزازية هي الحركة الجيبية البسيطة، التي تدعى الحركة التوافقية، يمكن توليد مثل هذه الحركة على حبل مشدود، وذلك بإحداث هزة عرضية في نقطة من الحبل، فتنتقل الحركة الاهتزازية الحاصلة على طول الحبل بسرعة c. يمثل الهزاز التوافقي أحد الأنماط المهمة للموجة، ويوضح الشكل (1-2) موجة الهزاز التوافقي، ويمكن وصف الموجة التوافقية بوساطة تابع جيبي من الشكل الآتي:

$$\psi(x) = A\sin(2\pi x/\lambda) \qquad (1.1)$$

ونلاحظ أن $\psi = 0$ عندما $x = 0$، ويتناهى الجزء الجيبي للتابع من 0 حتى 2π شاملاً اهتزازة كاملة واحدة عندما يتناهى x من 0 حتى λ. لنفترض أن الحالة في الشكل (1-1) متزامنة مع اللحظة $t = 0$، ولنرمز إلى سرعة الإزاحة عبر الوسط بالرمز c.



الشكل (1-2): الموجة التوافقية. يمثل A سعتها، و λ طول الموجة.

بعد لحظة من الزمن t، تنزاح الموجة نحو اليمين بمسافة قدرها ct، ويصبح التابع في هذه الحالة على النحو الآتي:

$$\Psi(x,t) = A\sin[(2\pi/\lambda)(x-ct)] \tag{2.1}$$

يستخدم الرمز الكبير Ψ للإشارة إلى التابع المتعلق بالزمن (2.1) المختلف عن التابع المستقل عن الزمن (1.1).

يمثل تواتر الموجة ν، كما ذكرنا سابقاً، عدد الاهتزازات خلال واحدة الزمن. فهو يمثل من أجل الموجة التوافقية المسافة المقطوعة في واحدة الزمن؛ أي السرعة c مقسومة على واحدة طول الموجة λ. إذاً:

$$\nu = c/\lambda \tag{3.1}$$

ولما كان $T = 1/\nu$، فإن $\lambda = cT$، كما يلاحظ أنه يمكن وصف الموجة بالعبارة الآتية:

$$\Psi'(x,t) = A\sin[(2\pi/\lambda)(x-ct)+\delta] \tag{4.1}$$

فهي شبيهة بالعلاقة (2.1) العائدة إلى Ψ، باستثناء بداية الإزاحة. وعند مقارنة الموجتين، نجد أن Ψ' تنزاح نحو يسار Ψ بمقدار قدره $\delta\lambda/2\pi$. فإذا كان $\delta = \pi$، 3π، ....، فإن Ψ' تنزاح بمقدار قدره $\lambda/2$، $3\lambda/2$، ....، وتكون الموجتان متعاكستين في الطور، وإذا كان $\delta = 2\pi$، 4π، ....، فإن Ψ' تنزاح بمقدار قدره λ، 2λ، ....، وتكون الموجتان متوافقتين في الطور. يمثل δ العامل الطوري من أجل Ψ' بالنسبة إلى Ψ. فضلاً عن ذلك، يمكن مقارنة الموجتين عند نقطة ما على المحور x، يمثل عندها العامل الطوري سبباً لاستبدال الموجتين ببعضهما.

2-2-1 الأمواج المستقرة Stationary (Standing) Waves

إذا انتشرت موجتان بسيطتان على حبل مشدود، تنتقل إحداهما في الاتجاه الموجب، وتتجه الأخرى في الاتجاه المعاكس، ويحدث نتيجة لذلك تداخل فيما بينهما، وينشأ عن هذا التداخل حركة اهتزازية مركبة. يحصل هذا الأمر إذا كان الحبل مثبتاً بإحكام من طرفيه كما في آلة الكمان، وإذا أحدثنا في الحبل حركة اهتزازية بسيطة، تنعكس عند طرفه الثابت، وتتداخل الحركة المنعكسة (reflected) مع الحركة الواردة (incident)، وتنشأ في شروط معينة حركة اهتزازية يأخذ فيها الحبل شكل مغازل. وهنا نقول إن حركة الحبل تتميز بموجتين متزامنتين:

$$\Psi(x,t) = \Psi_{\text{incident}}(x,t) + \Psi_{\text{reflected}}(x,t) \tag{5.1}$$

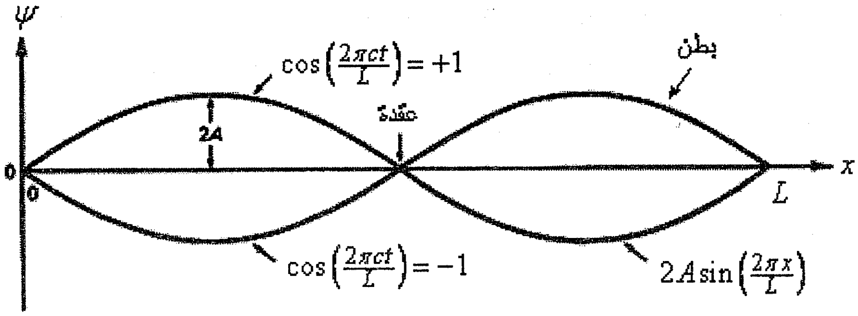
عندما تتمتع الموجتان الواردة والمنعكسة بالسعة والسرعة نفسهما، يمكن أن نكتب:

$$\Psi(x,t) = A\sin[(2\pi/\lambda)(x-ct)] + A\sin[(2\pi/\lambda)(x+ct)]$$

$$= 2A\sin(2\pi x/\lambda)\cos(2\pi ct/\lambda) \tag{6.1}$$

تصف هذه العبارة الموجة المستقرة – أي الموجة التي لا يمكن أن تبدي حركة عبر السلك، ولكنها تبدي اهتزازاً في موضعها. يتعلق الجزء الأول للتابع بالمتغير x فقط. بغض النظر عن قيمة t، فإن التابع Ψ ينعدم بانعدام التابع الجيبي، وهذا يعني أنه توجد مواضع لا يمكن أن يهتز فيها السلك، التي تدعى العقد، ويأخذ التابع $\sin(2\pi x/\lambda)$ قيماً محدودة بين العقد. مع تغير الزمن، تتراوح قيم التابع $\cos(2\pi ct/\lambda)$ بين (-1) و $(+1)$، وهذا يعني أن Ψ يتراوح بين القيم الموجبة والسالبة للتابع $\sin(2\pi x/\lambda)$. نلاحظ أن الجزء المتعلق بالمتحول x للتابع يعطي إزاحة أعظمية للموجة المستقرة، في حين يوجه الجزء المتعلق بالزمن t حركة الوسط ذهاباً وإياباً بين هذه النهايات للإزاحة الأعظمية. يوضح الشكل (1-3) الموجة المستقرة مع عقدة مركزية، وتكتب العلاقة (6.1) عادة على النحو الآتي:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\cos(\omega t) \tag{7.1}$$



الشكل (1-3): الموجة المستقرة في سلك مثبت بإحكام عند $x=0$ و $x=L$.

إذ إن:

$$\omega = 2\pi c / \lambda \tag{8.1}$$

ويمثل $\psi(x)$ تابع السعة، و ω عامل التواتر (السرعة الزاوية).

لندرس الآن كيف تختزن الطاقة في السلك المهتز الموصوف في الشكل (1-3). لا تتحرك أجزاء السلك عند العقدة المركزية، وعند الطرفين المثبتين. عندئذ تكون الطاقة الحركية الموافقة مساوية الصفر في جميع اللحظات. ولما كانت هذه الأجزاء لا تنزاح مطلقاً عن مواضع توازنها، فإن طاقاتها الكامنة تساوي الصفر دائماً أيضاً. وبناءً على ذلك، تساوي الطاقة الكلية المخزونة عند هذه الأجزاء الصفر دائماً، ويستمر السلك بالاهتزاز في النموذج المبين. إن الطاقات الحركية والكامنة الأعظمية توافق تلك الأجزاء المتوضعة عند قمم الموجة وعلى الجوانب المائلة (التي تدعى بالعقد المضادة)؛ لأن هذه الأجزاء متمتعة بسرعة وسطية أعظمية، ومنزاحة عن وضع التوازن، وتبين المعالجة الرياضية الأكثر تفصيلاً أن الطاقة الكلية لأي جزء للسلك متناسبة مع $|\psi(x)|^2$ [المسألة (1-7)].

1-3 معادلة الموجة التقليدية The Classical Wave Equation

تمثل معادلة الموجة التقليدية مسألة متعلقة بوصف شكل الموجة، وخصائصها، وكذلك توقع نوع الموجة الناشئة عن حركة جملة مهتزة، وللحصول على هذه التوقعات، يجب دراسة القوانين الفيزيائية التي يجب أن تحققها الجملة المهتزة. يتلخص

أحد الشروط في أن الجملة يجب أن تحقق قانون نيوتن للحركة. فمثلاً إن أي جزءٍ من السلك كتلته m خاضعاً للقوة F، يجب أن يخضع إلى تسارع قدره F/m تبعاً لقانون نيوتن الثاني. تبعاً لذلك، تتناغم الحركة الموجية تماماً مع حركة جسيم عادي. ولكن يتلخص الشرط الآخر الخاص بالأمواج في أن كل جزء للمادة مرتبط بالأجزاء المجاورة، وكأنه يزيح مجاوره، وينسحب على امتداده، وهذا الأخير في حد ذاته ينسحب برفقة مجاوره، أي لدينا خلل جماعي، وهذا يقدم الآلية التي بوساطتها ينتقل الاضطراب على امتداد المادة.

لندرس الآن السلك عند قوة شد قدرها T. عندما ينزاح السلك عن وضع توازنه، فإن هذا الجهد قادر على بذل قوة إرجاع. فمثلاً، لندرس جزءاً من السلك المرتبط بالمنطقة x و $x+dx$ المبينة في الشكل (4-1). فنلاحظ أن الجهد المبذول عند أية نهاية لهذا الجزء يمكن تحليله إلى مركبتين: مركبة موازية للمحور x، ومركبة عمودية عليه. تؤمن المركبة الموازية امتطاط السلك (الذي افترضناه أنه غير قابل للامتطاط)، في حين تعمل المركبة العمودية على تسارع الجزء مبتعداً عن موضع سكونه. عند النهاية اليمنى للجزء، تعطي المركبة العمودية F مقسومة على المركبة الأفقية الميل T. ولكن من أجل الانزياحات الصغيرة للسلك عند موضع توازنه (أي من أجل زاوية صغيرة α)، تكون المركبة الأفقية تقريباً متساوية بالطول مع المتجهة $\vec{T}$. هذا يعني أنه يمكننا بتقريب جيد أن نكتب:

$$\text{ميل المتجهة } T \text{ عند } x+dx = F/T \tag{9.1}$$

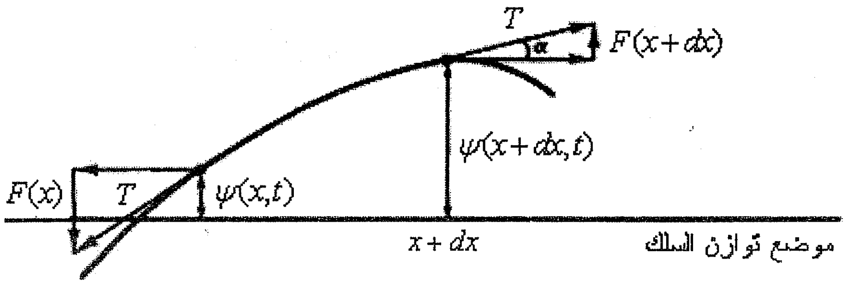
ولكن يعطى الميل من اشتقاق Ψ، ولذلك نكتب:

$$F_{x+dx} = T(\partial\Psi/\partial x)_{x+dx} \tag{10.1}$$

وعند الطرف الآخر للجزء، تؤثر قوة الشد في الاتجاه المعاكس، وتكون:

$$F_x = T(\partial\Psi/\partial x)_x \tag{11.1}$$

وتمثل القوة العمودية الكلية المؤثرة في الجزء المدروس للسلك مجموع هاتين العمليتين:



الشكل (1-4): جزء من السلك عند شد قدره T.

$$F_{x+dx} = T[(\partial\Psi/\partial x)_{x+dx} - (\partial\Psi/\partial x)_x] \tag{12.1}$$

يمثل الفرق في الميل عند نقطتين متباعدتين تباعداً لا متناهياً في الصغر، بقسمته على dx، المشتق الثاني للتابع، بحسب التعريف، ولذلك فإن:

$$F = T[\partial^2\Psi/\partial x^2]dx \tag{13.1}$$

تقدم العلاقة (13.1) القوة المؤثرة في جزء من السلك. إذا كان للسلك كتلة قدرها m في واحدة الطول، فإن للجزء dx كتلة قدرها $m\,dx$، ويمكن كتابة معادلة نيوتن $f = ma$ على النحو الآتي:

$$T\,\partial^2\Psi/\partial x^2 dx = mdx\,\partial^2\Psi/\partial t^2 \tag{14.1}$$

تذكر أن التسارع يمثل المشتق الثاني للموضع (للمكان) بالنسبة إلى الزمن، وتمثل العلاقة (14.1) معادلة الموجة للحركة في سلك بكثافة منتظمة عند قوة شد مساوية T. يتضح أن مشتقها متعلق بالجزء الأساسي للقانون الثاني لنيوتن، وأن نهايتي الجزء متشابهتان من حيث ترابطهما بقوة شد عامة.

يعطي تطبيق هذه العلاقة على الأمواج في وسط ثلاثي الأبعاد النتيجة الآتية:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x,y,z,t) = \beta\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} \tag{15.1}$$

إذ يضم β مقادير فيزيائية (مشابهة للمقدار m/T) من أجل جملة خاصة.

بالعودة إلى مثالنا حول السلك، نجد أن العلاقة (14.1) تمثل معادلة تفاضلية متعلقة بالزمن. لنفترض أنه استطعنا حصر دراستنا للأمواج المستقرة بفصلها إلى تابع سعة متعلق بالفراغ، وتابع توافقي متعلق بالزمن. عندئذٍ، يكون:

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\cos(\omega t) \qquad (16.1)$$

وتصبح المعادلة التفاضلية على النحو الآتي:

$$\cos(\omega t)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=\frac{m}{T}\psi(x)\frac{d^2\cos(\omega t)}{dt^2}=-\frac{m}{T}\psi(x)\omega^2\cos(\omega t) \qquad (17.1)$$

وبالتقسيم على $\cos(\omega t)$، نجد:

$$d^2\psi(x)/dx^2=-(\omega^2 m/T)\psi(x) \qquad (18.1)$$

تمثل هذه العلاقة معادلة الموجة التقليدية المستقلة عن الزمن.

يمكن أن نلاحظ بالتفحص نوعَ التابع $\psi(x)$ الذي يجب أن يحقق العلاقة (18.1)؛ إذ يمثل ψ التابعَ الذي عند أخذ مشتقه الثاني يتولد من جديد مع المعامل $(-\omega^2 m/T)$. إن أحد الحلول هو:

$$\psi=A\sin\left(\omega\sqrt{m/T}\right)x \qquad (19.1)$$

إن هذا يوضح أن للعلاقة (18.1) حلول جيبية متنوعة، مثل تلك التي نوقشت في الفقرة 1-2. نلاحظ من مقارنة العلاقة (19.1) بالعلاقة (1.1) أن $2\pi/\lambda=\omega\sqrt{m/T}$، ويؤدي تعويض هذه العلاقة في العلاقة (18.1) إلى النتيجة الآتية:

$$d^2\psi(x)/dx^2=-(2\pi/\lambda)^2\psi(x) \qquad (20.1)$$

التي تمثل الشكل الأكثر فائدة من أجل أهدافنا.

أما من أجل الجمل ثلاثية الأبعاد [انظر العلاقة (15.1)]، فيعبر عن معادلة الموجة التقليدية المستقلة عن الزمن من أجل الوسط المنتظم والمعزول على النحو الآتي:

$$(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2)\psi(x,y,z)=-(2\pi/\lambda)^2\psi(x,y,z) \qquad (21.1)$$

إذ يتعلق λ بمرونة الوسط.

يدعى تركيب المشتقات الجزئية في الطرف الأيسر للعلاقة (21.1) اللابلاسـيان، ويعطى عادة بالرمز المختصر ∇^2 (مربع نبلا). ولذلك تكتب العلاقـة (21.1) علـى النحو الآتي:

$$\nabla^2\psi(x,y,z) = -(2\pi/\lambda)^2\psi(x,y,z) \qquad (22.1)$$

4-1 الأمواج المستقرة في سلك مشدود بإحكام

Stationary (Standing) Waves in a Clamped String

لنوضح الآن كيف يمكن استخدام العلاقة (20.1) للتنبؤ بطبيعة الأمواج المـستقرة في سلك. لنفترض أن السلك مثبت من الطرفين عند $x = 0$ و $x = L$. هذا يعنـي أن السلك لا يمكن أن يهتز عند هاتين النقطتين، وهذا يعني رياضياً أن:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \qquad (23.1)$$

لندرس هذه الشروط التي تدعى بالشروط الحدية، ولنسأل: ما التوابع ψ التي تحقـق العلاقة (20.1)، والشروط (23.1)؟ لنبدأ بمحاولة إيجاد التابع الـذي يحقـق العلاقـة (20.1). لقد وجدنا سابقاً أن $A\sin(2\pi x/\lambda)$ يمثل حلاً، ولكن يمكن بسهولة إظهار أن $A\cos(2\pi x/\lambda)$ يمثل حلاً أيضاً. ونظراً لكون العلاقة (20.1) خطية، فإن مجمـوع هذين التابعين هو حل أيضاً؛ أي أن:

$$\psi(x) = A\sin(2\pi x/\lambda) + B\cos(2\pi x/\lambda) \qquad (24.1)$$

ونحصل بتغيير A و B على توابع مختلفة ψ.

ثمة ملاحظتين عند هذه النقطة، الملاحظة الأولى: توجد توابع أخرى تحقق العلاقة (20.1)، مثل $A\exp(2\pi ix/\lambda)$، و $A\exp(-2\pi ix/\lambda)$؛ إذ إن $i = \sqrt{-1}$. لكننا لـن نضم هذه التوابع في التابع العام (24.1) نظراً لإمكانية التعبير عن التابع الأسي بدلالة التوابع المثلثية، وذلك لأن:

$$\exp(\pm ikx) = \cos(kx) \pm i\sin(kx) \qquad (25.1)$$

هذا يعني أنه يمكن التعبير عن أي تابع مثلثي بدلالة توابع أسية، والعكس صحيح. إذاً،

توجد مجموعة وفيرة من التوابع المثلثية، ومجموعة وفيرة من التوابع الأسية، ولكن لن نحصل على نتيجة إضافية عند ضم التوابع الأسية في العلاقة (24.1) (انظر المسألة 1-1)؛ إذ تعد المجموعتان مرتبطتين خطياً.

الملاحظة الثانية: من أجل قيم محددة لـ A و B، فإن التابع الموصوف بالعلاقة (24.1) يمثل موجة جيبية وحيدة بطول موجة λ، ويؤدي تغيير قيم A و B إلى انزياح الموجة نحو اليسار أو اليمين تبعاً للمنطقة المدروسة. فمثلاً، إذا كان $A=1$ و $B=0$، فإن الموجة ستتمتع بعقدة عند $x=0$، أما إذا كان $A=0$ و $B=1$، فستتمتع بعقدة مضادة عند $x=0$.

لنتابع الآن تحديد الثابتين حسب الشروط الحدية السابقة. يعطي الشرط $x=0$ النتيجة الآتية:

$$\psi(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = 0 \tag{26.1}$$

ولكن لما كان $\sin(0)=0$، $\cos(0)=1$، فإن:

$$B = 0 \tag{27.1}$$

وبناءً على ذلك، يجعل هذا الشرط الحدي الأول الثابت B مساوياً الصفر، وينتج عن ذلك النتيجة الآتية:

$$\psi(x) = A\sin(2\pi x/\lambda) \tag{28.1}$$

ويعطي الشرط الحدي الثاني عند $x=L$ النتيجة:

$$\psi(L) = A\sin(2\pi L/\lambda) = 0 \tag{29.1}$$

ويكون أحد الحلول مشروطاً بجعل A مساوياً الصفر، وهذا ما يجعل $\psi=0$، وهذا يعني أنه لن تحصل الموجة عند السلك. أما الحل الآخر الممكن هو جعل $(2\pi L/\lambda)$ مساوياً إلى 0، π، 2π، ...، $n\pi$؛ لأن التابع sine ينعدم عند هذه القيم، وهذا يؤدي إلى النتيجة الآتية:

$$2\pi L/\lambda = n\pi, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{30.1}$$

أو:

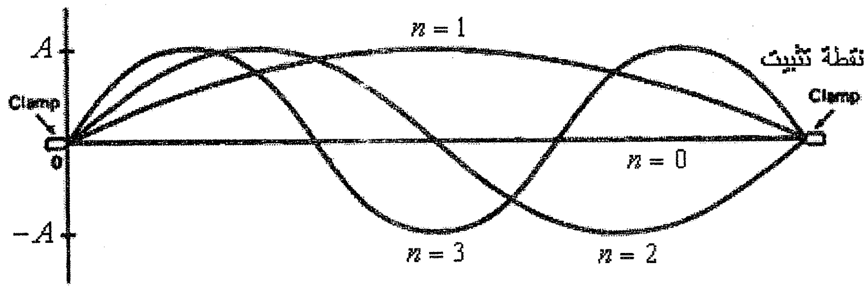
$$\lambda = 2L/n, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{31.1}$$

يؤدي تعويض هذه النتيجة في العلاقة (28.1) إلى التابع الآتي:

$$\psi(x) = A\sin(n\pi x/L) \tag{32.1}$$

يوضح الشكل (1-5) بعضاً من هذه الحلول. يمثل الحل من أجل $n=0$ الحالة $\psi = 0$ (حالة غير مهتزة). فضلاً عن ذلك، لما كان $\sin(-x)$ مكافئاً إلى $-\sin(x)$، فمن الواضح أنه يمكن استنتاج مجموعة من التوابع بأخذ الأعداد الصحيحة الموجبة للعدد n، التي لا تختلف فيزيائياً عن استنتاج مجموعة من التوابع بأخذ الأعداد الصحيحة السالبة للعدد n (إذ تعد المجموعتان مرتبطتين خطياً). لنحدد الآن الثابت A. إن ذلك يتطلب معرفة نوع الطاقة المخزونة في الموجة؟ أو شدة القساوة التي يتمتع بها السلك؟ من الواضح أنه يوجد عدد غير محدود من الحلول المقبولة، وكل منها يوافق عدداً محدداً من الأمواج النصفية (غير الكاملة) الملائمة بين 0 و L. ولكن يمكن استثناء عدد من الأمواج عن طريق الشروط الحدية، وعلى وجه التحديد، جميع الأمواج المتمتعة بأطوال موجية غير قابلة للقسمة على $2L$ مضروباً في أي عدد صحيح.

تأخذ الأطوال الموجية قيماً محددة متقطعة دائماً نتيجةً لتطبيق الشروط الحدية. كما سنلاحظ لاحقا أن هذا السلوك يعزى إلى تكمم الطاقات في الميكانيك الكمومي.

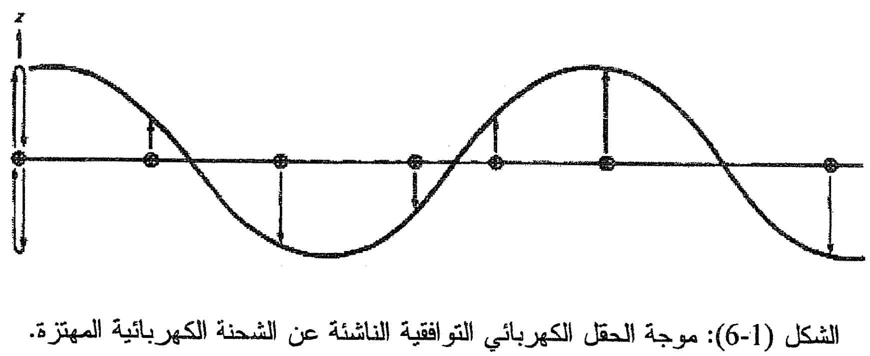


الشكل (1-5): الحلول من أجل معادلة الموجة المستقلة عن الزمن في بعد وحيد مع الشروط الحدية $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

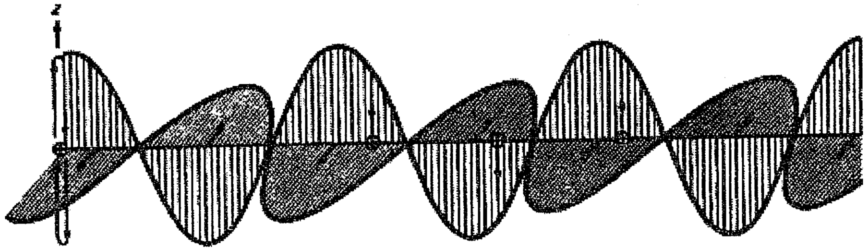
يعد المثال المدروس أعلاه من أبسط المسائل. فضلاً عن ذلك، فهو يوضح كيف يمكن استخدام المعادلة التفاضلية، والشروط الحدية لتحديد الحالات المسموح بها للجملة. لقد توصلنا إلى الحلول من أجل هذه الحالة بالمعالجة الفيزيائية البسيطة، ولكن ذلك غير ممكن من أجل الحالات المعقدة، ولكن توفر المعادلة التفاضلية طريقة نظامية لإيجاد الحلول عندما تكون البديهة الفيزيائية غير كافية.

5-1 طبيعة الضوء The Nature of Light

لنفترض أن الجسيم المشحون يقوم باهتزازة توافقية على المحور z. إذا وجد جسيم مشحون آخر بعيداً عنه بمسافة محددة، وكان في البداية مستقراً في المستوي xy، فإن الجسيم الثاني يبدأ بالاهتزاز توافقياً أيضاً. وهكذا تبدأ الطاقة بالانتقال من جسيم إلى آخر، وهذا ما يشير إلى وجود حقل كهربائي مهتز منبعث من الجسيم الأول. يمكن رسم مقدار هذا الحقل الكهربائي عند لحظة محددة بدلالة سلسلة من الشحنات الاختبارية التخيلية موضوعة على امتداد خط الإصدار من المصدر والعمودي على محور الاهتزاز [الشكل (1-6)]، وإذا وجد حقل مغناطيسي ما بالقرب من الشحنة المهتزة، فسوف يتمايل ذهاباً وإياباً تجاوباً مع الاضطراب الحاصل. هذا يعني أن الحقل المغناطيسي المهتز ناشئ عن الشحنة المهتزة أيضاً، ونلاحظ، بتغيير وضع الحقل، أن هذا الحقل يهتز في مستوٍ عمودي على محور اهتزاز الجسيم المشحون. يوضح الشكل (1-7) الحقلين الكهربائي والمغناطيسي المتنقلين على امتداد الشعاع.



الشكل (1-6): موجة الحقل الكهربائي التوافقية الناشئة عن الشحنة الكهربائية المهتزة.



الشكل (1-7): الحقل الكهرومغناطيسي الناشئ عن الشحنة الكهربائية المهتزة.

تتوالد الشحنات في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي ظاهرياً بسرعة مميزة c، وتوصف وكأنها موجة متنقلة، وتسمى موجة كهرومغناطيسية. يمثل تواترها ν التواتر الاهتزازي نفسه للشحنة المهتزة، ويعبر عن طول الموجة بالعلاقة $\lambda = c \backslash \nu$. إن الأشعة فوق البنفسجية، والضوء المرئي، والإشعاع تحت الأحمر، والمجهرية، والأمواج الراديوية، تمثل جميعها شكلاً من أشكال الأشعة الكهرومغناطيسية.

إذا كانت حزمة الضوء موجهة باتجاه موجة الحقل الكهربائي في المستوي نفسه، يقال إن الضوء مستقطب مستوياً (أو خطياً). إن الضوء المستقطب مستوياً المبين في الشكل (1-7) يقال إنه مستقطب على المحور z، أو باختصار مستقطب z. إذا دار مستوي توجه موجة الحقل الكهربائي باتجاه عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة حول محور الانتقال (أي إذا كانت موجة الحقل الكهربائية لولبية في الفراغ)، يقال إن الضوء مستقطب دائرياً (يمينياً أو يسارياً)، وإذا كان الضوء مؤلفاً من موجات متمتعة بتوجهات حقل عشوائية، بشرط عدم وجود أي توجه ناتج أو عام، يقال إن الضوء غير مستقطب.

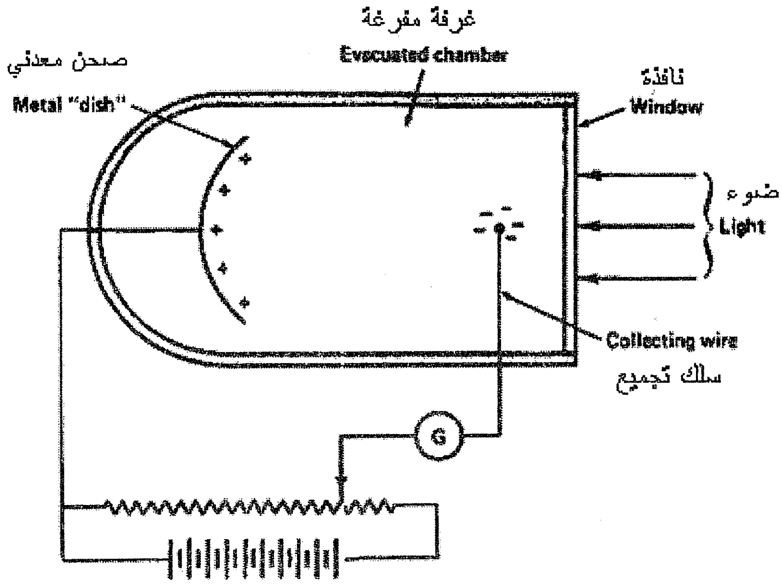
تتوافق نتائج تجارب القرن التاسع عشر مع فكرة أن الضوء يبدي الظاهرة الموجية، ولقد أثبتت هذه الظاهرة تجريبياً عن طريق نموذج التداخل بين موجتين، ومن ثم الانعراج الناشئ عن عبور الضوء من مصدر نقطي عبر شق ضيق، ثم ملاحظة انحرافه على الشاشة. وقد فُسّرت نماذج التداخل الحاصلة فقط اعتماداً على مفهوم التداخل البناء والهدام (غير البنائي) للأمواج، كما أن معادلات ماكسويل التفاضلية، والتي تصف الحقل الكهرومغناطيسي، بيّنت أن الضوء ممثل بموجة.

ولكن ثمة بعض المشاكل الأخرى حيرت الفيزيائيين، وسنعرض بعضاً منها في الفقرات الآتية، عجزت النظرية الفيزيائية التقليدية عن تفسيرها، مثال ذلك خصائص شدة الضوء، وطول موجته، المنبعث (الصادر) عن توهج الجسم الأسود. ولقد درس العالم بلانك هذه المسألة، وتوصل إلى أن الجسيمات المهتزة التي تصدر الضوء تستطيع أن توجد فقط في سويات طاقية محددة ومتقطعة (منفصلة). إننا لن نناقش هذه المسألة في هذا الكتاب رغم أهميتها في انبثاق ميكانيك الكم، ولكن سندرس في الفقرة الآتية مسألة أخرى متعلقة بظاهرة المفعول الكهرضوئي التي اكتشفت في عام 1800، والمهمة أيضاً من الناحية الكمومية.

6-1 الفعل الكهرضوئي The Photoelectric Effect

تحدث هذه الظاهرة عندما يرد الضوء إلى بعض المواد بتواتر معين، فيؤدي إلى نزع الإلكترونات من سطحها. ثمة عدة مواد تبدي هذه الظاهرة بسرعة كبيرة، ويوضح الشكل (1-8) مخطط بعض الأجهزة البسيطة المستخدمة لدراسة هذا السلوك؛ إذ يسقط الضوء الوارد على الصحن المعدني في حجرة مفرغة، وإذا اقتلعت الإلكترونات، فإن بعضاً منها ينتقل إلى سلك التجميع، مما يؤدي إلى نشوء انحراف المقياس الغلفاني.

نستطيع في هذا الجهاز تغيير فرق الكمون بين الصحن المعدني وسلك التجميع، وكذلك شدة الضوء الوارد وتواتره. لنفترض أننا جعلنا فرق الكمون مساوياً الصفر، فيلاحظ مرور التيار عندما ينفذ الضوء بشدة وتواتر محددين إلى الصحن. هذا يعني أن الإلكترونات بدأت بالإصدار أو الانبعاث من الصحن بطاقة حركية محددة، تخولها للانتقال إلى السلك، وإذا طبقنا الآن كمون إيقاف، فإن الإلكترونات الصادرة بطاقة حركية صغيرة غير كافية للتغلب على الكمون المثبط لن تنتقل إلى السلك. نتيجة لذلك، يتناقص التيار المكتشف، ويمكن زيادة الكمون المثبط تدريجياً حتى النهاية، إلى أن نجعل معظم الإلكترونات الضوئية الفعالة غير قادرة على الانتقال إلى سلك التجميع. إن هذا يُمكننا من حساب الطاقة الحركية الأعظمية للإلكترونات المنبعثة الناتجة عن تأثير الضوء الوارد في المعدن المدروس.



الشكل (1-8): أنبوب ضوئي.

يمكن تلخيص نتائج تجارب هذا النوع على النحو الآتي:

1. عندما يكون تواتر الضوء الوارد أخفض من التواتر الحرج، لا يلاحظ انبعاث الإلكترونات الضوئية، ولن يتأثر المعدن بالضوء.

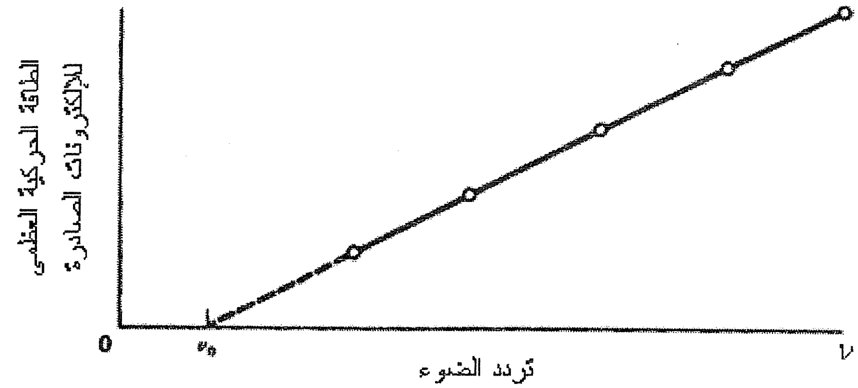
2. عندما يكون تواتر الضوء الوارد أعلى من التواتر الحرج، يتناسب عدد الإلكترونات الضوئية طرداً مع شدة الضوء.

3. كلما ازداد تواتر الضوء الوارد، ازدادت الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات الضوئية.

4. في الحالات التي تكون عندها شدة الإشعاع منخفضة جداً (ولكن التواتر أعلى من التواتر الحرج)، تنبعث الإلكترونات الضوئية من المعدن من دون أي تأخر.

يلخص الشكل (1-9) بعضاً من هذه الاستنتاجات تخطيطياً، كما تعطى الطاقة الحركية (E_T) للإلكترونات الضوئية بالعلاقة الآتية:

$$E_T = h(\nu - \nu_0) \qquad (33.1)$$



الشكل (1-9): الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات الضوئية بصفتها تابعاً لتواتر الضوء.

إذ يمثل h ثابتاً، ويمثل الميل h نفسه من أجل المواد جميعها، ويتعلق التواتر الحرج ν_0 بالمعدن المدروس (وكذلك بدرجة الحرارة)، ويمكن أيضاً كتابة الطاقة الحركية على النحو الآتي:

$$E_T = E - E_{sc} \qquad (34.1)$$

إذ يمثل E طاقة الضوء، و E_{sc} الطاقة الضرورية لمغادرة السطح أو العمل اللازم لمغادرة سطح المعدن، ويرمز إلى هذا العمل بالرمز W، وتؤدي مساواة العلاقة (33.1) مع العلاقة (34.1) إلى النتيجة الآتية:

$$E - W = h\nu - h\nu_0 \qquad (35.1)$$

يكافئ الحد W المتعلق بالمادة الحد $h\nu_0$ المتعلق بالمادة أيضاً، وينتج من ذلك أن:

$$\text{(طاقة الضوء)} \ \text{(energy of light)} \equiv E = h\nu \qquad (36.1)$$

إن قيمة h المحددة تساوي 6.626176×10^{-34} J sec، وتدعى ثابت بلانك (انظر الملحق وعوامل التحويل).

لا يمكن تفسير المفعول الكهرضوئي اعتماداً على قوانين الفيزياء التقليدية؛ لأنه يفترض عند سقوط الموجة الضوئية على سطح معدني حساس أن يبدأ المعدن بامتصاص هذه الطاقة الضوئية وتجميعها حتى يصل إلى مخزون يبدأ المعدن بعدها بإطلاق الإلكترونات؛ أي يوجد فترة زمنية بين لحظة سقوط الضوء ولحظة خروج

الإلكترونات من السطح المعدني مرتبطة بشدة الضوء. ولكن تظهر التجربة أن خروج الإلكترونات لا تعتمد على شدة الضوء، بل على تردده، حتى في حالة الأمواج الضوئية الضعيفة والمميزة بتردد أعلى من التردد الحرج ν_0، فإن الإلكترونات تنبعث تلقائياً من السطح من دون أي تأخر.

أعطى آينشتاين تعليلاً مرضياً لهذه الظاهرة باستخدام مبدأ الكم؛ إذ افترض آينشتاين أن الضوء مكون من فوتونات، ويحمل كل فوتون وحدة طاقة قدرها $h\nu$، وعند سقوط الضوء على سطح معدني حساس، يمتص أحد الإلكترونات على السطح مباشرة وحدة ضوئية، فإذا كانت قيمة هذه الوحدة من الطاقة تساوي طاقة ارتباط الإلكترونات بالجسم الصلب (المعدن) أو أكبر منها، فإن الإلكترون يترك السطح، وينبعث إلى الخارج، أما إذا كانت طاقة الفوتون أقل من طاقة ارتباط الإلكترون بالجسم الصلب، فإن الإلكترون لا يستطيع الانبعاث إلى خارج السطح؛ أي أن طاقة الوحدة، وليست الطاقة الكلية، هي التي تحدد ما إذا كان انبعاث الإلكترون ممكناً أم لا، وهذا يعلل الملاحظة الأولى في وجود تردد العتبة ν_0. عندما يكون تردد الضوء الساقط أكبر من التردد الحرج ν_0، فإن جزءاً من الطاقة الممتصة يُستهلك للتغلب على قوة ارتباط الإلكترون بالجسم الصلب، ويمثل الجزء المتبقي من الطاقة طاقة حركة الإلكترون المنبعث؛ أي أن:

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - h\nu_0$$

أما عدد الإلكترونات المنبعثة، فيتوقف على عدد الفوتونات الساقطة على سطح المعدن كما هو وارد في التجربة.

مثال 1-1: يكفي أن يكون الكمون المثبط البالغ 2.38 eV ليوقف انبعاث الإلكترونات الضوئية من البوتاسيوم بوساطة ضوء بتواتر قدره $1.13\times10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$. ما قيمة W الموافقة للبوتاسيوم؟

الجواب: نعلم أن:

$$E = h\nu = W + E_T \Rightarrow W = h\nu - E_T$$

إذ تمثل E_T الطاقة الحركية للإلكترونات العائدة للبوتاسيوم، وهي تمثل قيمة الكمون المثبط. لتطبيق هذه العلاقة لحساب W يجب استخدام واحدة ملائمة لثابت بلانك، وهي

eVs (انظر تحويل الواحدات في الملحق)، في هذه الحالة يجب استخدام المقدار $h = 4.136\times10^{-15}$ eVs، ويؤدي تعويض القيم المعطاة في العلاقة السابقة إلى النتيجة الآتية:

$$W = (4.136\times10^{-15}\ \text{eV s})\times(1.13\times10^{15}\ \text{s}^{-1}) - 2.38\ \text{eV} = 2.29\ \text{eV}$$

مثال 2-1: يعبر عن ΔE في علم الأطياف من أجل الانتقال بين الحالات بواحدة العدد الموجي، أي بالواحدة m^{-1} أو cm^{-1}، المختلفة عن واحدة الطاقة J أو eV:

a) ما المعنى الفيزيائي لمصطلح العدد الموجي؟

b) ما العلاقة بين العدد الموجي والطاقة؟

c) ما العدد الموجي الموافق لطاقة قدرها 1.000 J؟ و 1.000 eV؟

الجواب: a) يمثل العدد الموجي عدد أطوال الموجة الموافق لواحدة الطول، ويرمز له عادة بالرمز $\tilde{\nu} = 1/\lambda$؛ إذ يمثل λ طول الموجة بواحدة cm.

b) يرتبط العدد الموجي بطاقة أحد الفوتونات المكونة للضوء بالعلاقة الآتية:

$$E = h\nu = hc/\lambda = hc\tilde{\nu}$$

إذ تعطى c بواحدة cm/s.

c) يمكن تحديد العدد الموجي الموافق لطاقة قدرها 1.000 J أو 1.000 eV بتطبيق العلاقة الأخيرة:

$$E = hc\tilde{\nu} \Rightarrow \tilde{\nu} = E/hc$$

فمن أجل $E = 1.000\ \text{J}$، نجد:

$$\tilde{\nu} = \frac{E}{hc} = \frac{1.000\ \text{J}}{(6.626\times10^{-34}\ \text{J s})\times(2.998\times10^{10}\ \text{cm/s})} = 5.034\times10^{22}\ \text{cm}^{-1}$$

من الواضح أن هذا الضوء متمتع بطول موجة قصير جداً. أما من أجل $E = 1.000\ \text{eV}$، فيجب استخدام الثابت h بالواحدة eV s، وبالتعويض، نجد أن $\tilde{\nu} = 8065\ \text{cm}^{-1}$.

7-1 الطبيعة الموجية للمادة The Wave Nature of Matter

أظهرت تجارب الضوء الفيزيائي من تداخل، وانكسار، وانعراج، الطبيعة الموجية للضوء، فضلا عن ذلك، تم تفسير الفعل الكهرضوئي بافتراض أن الضوء مكمم، ومكون من جسيمات (فوتونات) ذات كتلة معدومة وطاقة $E = h\nu$، وتؤكد مجموعة التجارب الفيزيائية المتمم بعضها بعضاً على اقتراح الطبيعة المثنوية (موجية-جسيمية) للضوء. ولكن هل للجسيمات العادية طبيعة مثنوية؟

لنتصور جسيماً كتلته m، وسرعته v، فإذا اقتربت سرعته من سرعة الضوء، فيمكن أن يسلك هذا الجسيم سلوكاً شبيها بسلوك الفوتون، ولقد افترض دي بروي أن الجسيمات المادية المرافقة للأمواج، التي أطلق عليها "الأمواج المادية"، ولكن لا يمكن ملاحظة وجود هذه الأمواج إلا في سلوك المكونات المجهرية للمادة.

يمكن التوصل إلى علاقة دي بروي على النحو الآتي. تكتب علاقة آينشتاين من أجل الفوتونات بالشكل الآتي:

$$E = h\nu \qquad (37.1)$$

ولكن تتمتع الفوتونات، حاملةً الطاقة E، بكتلة نسبية تعطى بالعلاقة الآتية:

$$E = mc^2 \qquad (38.1)$$

وتؤدي مساواة هاتين العلاقتين إلى النتيجة الآتية:

$$E = mc^2 = h\nu = hc/\lambda \qquad (39.1)$$

أو:

$$mc = h/\lambda \qquad (40.1)$$

أما الجسيم العادي ذو الكتلة السكونية غير الصفرية، فينتقل عند سرعة v. إذا نظرنا إلى العلاقة (40.1) بصفتها حداً للسرعة القصوى لمعظم العبارات العامة، سنتوصل إلى العلاقة التي تربط كمية الحركة p بطول الموجة λ:

$$mv = p = h/\lambda \qquad (41.1)$$

أو

$$\lambda = h / p \tag{42.1}$$

إذ تمثل m كتلة الجسيم في حالة الحركة مضافاً إليها التصحيح النسبي، ولكن يهمل هذا الأخير مقارنةً بالكتلة السكونية. اقترح هذه العلاقة العالم دي بروي في عام 1922، وأثبت صحتها العالمان دافيسون وجيرمر بإظهار أن حزمة الإلكترونات الواردة على صفيحة من النيكل تشكل نماذج الانحراف المتوقعة من الأمواج المتداخلة. إن هذه الأمواج الإلكترونية تتمتع بأطوال موجة مرتبطة بكمية حركة الإلكترون وفقا لعلاقة دي بروي.

يمكن باستخدام العلاقة (42.1) ربط طول موجة دي بروي λ للمادة بطاقتها الحركية T:

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 = (1/2m)(m^2 v^2) = p^2 / 2m \tag{43.1}$$

ينتج من ذلك أن:

$$p = \sqrt{2mT} \tag{44.1}$$

فضلاً عن ذلك، لما كانت $E = T + V$؛ إذ تمثل E الطاقة الكلية، و V الطاقة الكامنة، يمكن كتابة طول موجة دي بروي بالشكل الآتي:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \tag{45.1}$$

تعد العلاقة (45.1) مفيدة من أجل فهم الوسيلة التي يتغير بها λ من أجل جسيم متحرك بطاقة كلية ثابتة في كمون متغير. فمثلاً عند وضع جسيم في منطقة يكون فيها الطاقة الكامنة متزايدة (مثل اقتراب الإلكترون من صفيحة مشحونة بشحنة سالبة)، يتناقص المقدار $(E-V)$، ويتزايد λ (أي يتباطأ الجسيم، وبذلك تتناقص كمية حركته، ويتزايد طول موجته الموافقة). سنجد أمثلة على هذا السلوك في فصول لاحقة. لوحظ أنه إذا كان $E \geq V$، وكما هو مبين في العلاقة (45.1)، يعد هذا عادياً؛ لأن هذا الشرط يعطي قيماً موجبة لطول الموجة λ. ولكن إذا كان $E \leq V$، تصبح العلاقة رياضياً تخيلية؛ لأن هذا الشرط يجعل المقدار ما تحت الجذر سالباً، ولا يمكن مصادفة

هذه الحالة تقليدياً، ولكن سنجد أن دراسة هذه الإمكانيـــة فـــي الميكانيـــك الكمـــومي ضرورية.

مثال 1-3: تم تسريع الشاردة He^{2+} من السكون عبر صمام فولطي (1.000 كيلو فولط). ما طول موجة دي بروي الموافقة؟ هل تبدي خصائص شبيهة بالموجة؟

الجواب: لما كانت شحنة وحدتين إلكترونيتين تعبر صمام فولطي طبق عليه كمون قـــدره 1.000 كيلـــو فـــولط، فـــإن الطاقـــة الحركيـــة النهائيـــة للـــشاردة تـــساوي 2.000×10^{3} eV. ولحساب λ ، يجب أولاً إجراء التحويل من eV إلى Joules:

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = (2.000\times10^{3}\ \text{eV})(1.60219\times10^{-19}\ \text{J/eV})$$
$$= 3.204\times10^{-16}\ \text{J}$$

ثم نحدد كتلة الشاردة على النحو الآتي:

$$m_{\text{He}^{2+}} = (4.003\,\text{g/mol})(10^{-3}\ \text{kg/g})(1\ \text{mol}/6.022\times10^{23}\ \text{atms})$$
$$= 6.65\times10^{-27}\ \text{kg}$$

نحدد من هاتين القيمتين قيمة p :

$$p = \sqrt{2m_{\text{He}^{2+}}\cdot E_k} = [2(6.65\times10^{-27}\ \text{kg})(3.204\times10^{-16}\ \text{J})]^{1/2}$$
$$= 2.1\times10^{-21}\,\text{kg m/s}$$

وبالتعويض في العلاقة (41.1)، نجد:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626\times10^{-34}\ \text{J s}}{2.1\times10^{-21}\,\text{kg m/s}} = 3.2\times10^{-13}\,\text{m}$$
$$= 0.32\,\text{pm}$$

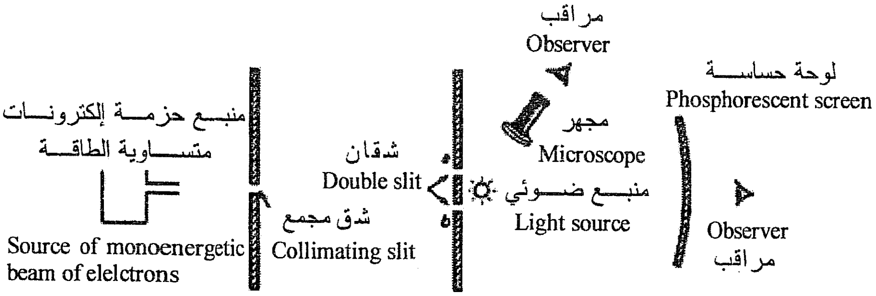
إن طول الموجة هذا من مرتبة 1% من نصف قطر ذرة الهيدروجين، قـــصير جـــداً، وغير كاف ليبدي نتائج التداخل الجديرة بالملاحظة عند تأثره بالمبعثر بأبعـــاد ذريـــة، ويمكن معالجة هذا الأيون ببساطة بصفته جسيماً ذا سرعة عالية.

8-1 تجربة الانحراف بوساطة الإلكترونات

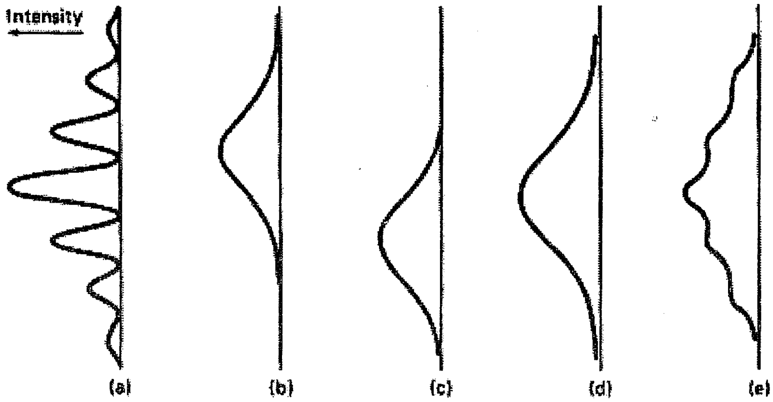
A Diffraction Experiment with Electrons

لفهم معنى الأمواج المادية، سندرس الآن مجموعة من التجارب البسيطة. لنفترض أنه لدينا مصدر لحزمة من الإلكترونات، وزوج من الشقوق، كما هو مبين تخطيطياً في الشكل (1-10). إن أي إلكترون يبلغ الشاشة الحساسة يشكل ومضة ضوئية كما في التلفاز. لنهمل حالياً المصدر الضوئي بالقرب من الشقوق (بافتراض أنه متقلب)، وسنبحث عن طبيعة الصورة على الشاشة الحساسة عندما تتوجه الحزمة الإلكترونية عند الشقوق. إن الملاحظة التي تتوافق مع ملاحظات دافيسون وجيرمر المشار إليها سابقاً، هي ظهور عصابات متعاقبة مضيئة ومظلمة، وهذا ما يشير إلى أن الحزمة الإلكترونية تنحرف بوساطة الشقوق. فضلاً عن ذلك تتوافق المسافة الفاصلة بين العصابات مع طول موجة دي بروي الموافقة لطاقة الإلكترون، ويبين الشكل (1-11a) التغير في شدة الضوء الملاحظ على الشاشة.

من الواضح أن الإلكترونات في هذه التجربة تبدي سلوك الموجة. هل هذا يعني أن الإلكترونات تنتقل بصفتها أمواجاً عند اكتشافها عند الشاشة؟ سنختبر ذلك بتخفيض شدة الحزمة بجعل إلكترون واحد فقط يعبر الجهاز خلال ثانية، ويلاحظ أن كل إلكترون يعطي نقطة ضوئية متمركزة (موضعية) واضحة بدقة، ويظهر نموذج الانحراف تدريجياً بجمع العديد من النقاط. وهكذا يتمتع مربع موجة دي بروي بالنمط نفسه للمعنى التقليدي الذي افترضه آينشتاين للأمواج الكهرومغناطيسية والفوتونات، وتعد الإلكترونات في الواقع جسيمات متمركزة، فهي على الأقل تكتشف عند الشاشة.



الشكل (1-10): تجربة الانحراف بوساطة الإلكترونات.



الشكل (1-11): شدة الضوء عند الشاشة الفوتوغرافية عند شروط متغيرة. (a) عند فتح الشقين a و b، والضوء مطفأ (b) عند فتح الشق a، وغلق الشق b، والضوء مطفأ (c) عند غلق a، وفتح b، والضوء مطفأ، (e) عند فتح الشقين a و b، والضوء مشتعل.

ولكن إذا كانت بالفعل جسيمات، فمن الصعب ملاحظة كيف يمكنها أن تنحرف. لندرس ماذا يحصل عند غلق الشق b. عندئذ، فإن جميع الإلكترونات الملاحظة عند الشاشة يجب أن تأتي عبر الشق a. نلاحظ النتيجة عند مساحة مضيئة وحيدة على الشاشة [الشكل (1-11b)]. يعطي غلق الشق a وفتح الشق b مساحة ضوئية مماثلة كما هو مبين في الشكل (1-11c)]، وتعد هذه النماذج متوقعة من أجل الجسيمات. الآن بفتح الشقين، يتوقع أن يعبر نصف الجسيمات عبر a، والنصف الآخر عبر b، ويمثل النموذج الحاصل مجموع النتيجتين السابقتين. عوضاً عن ذلك نحصل على نموذج الانحراف [الشكل (1-11a)]. كيف يمكن أن يحصل ذلك؟ يلاحظ أن الإلكترونات التي تعبر الجهاز تستطيع أن تتحسس إما بأحد الشقوق، وإما بكليهما عند فتحهما، ورغم أنها جسيمات، فيمكن اكتشافها عند أحد الشقين فقط، ويفترض أن نلاحظ نتيجة العبور اللحظي لإلكترونين عبر الشقين، وتأثير مسار كل إلكترون بوجود الإلكترون في الشق الآخر. إن هذا يُمكننا من تفسير كيف يعبر الإلكترون عبر الشق a بغلق الشق b أو فتحه. ولكن تشير حقيقة أن النموذج يبدأ بالظهور عندما تعبر الإلكترونات عند سرعة خلال ثانية واحدة، إلى أنه لا يمكن تفسير ذلك. هل يستطيع أي إلكترون أن يتقدم عبر الشقين معاً؟ لمناقشة هذا السؤال، نحتاج إلى معلومات تفصيلية حول مواضع (أماكن)

الإلكترونات عند عبورها عبر الشقين. يمكن الحصول على هذه المعطيات بوضع أحد المصادر الضوئية، وتوجيه مجهر عند الشقين. عندئذ سترصد الفوتونات كل إلكترون عند عبوره الشقين، ويمكن ملاحظة ذلك عبر المجهر. يمكن أن يخبرنا المراقب ما هو الشق الذي عبره كل إلكترون، ويسجل أيضاً موضعه النهائي على الشاشة الحساسة. ويجب في هذه التجربة استخدام ضوءٍ متمتعاً بطول موجة قصير مقارنة بالمسافة المدروسة، ومن ناحية أخرى يجب أن يكون المجهر غير قادر على تبديد الومضة إلى حد كاف ليخبرنا عن ذلك الشق الأقرب. عند إجراء هذه التجربة، بالفعل نلاحظ أن كل إلكترون يعبر أحد الشقين، ولا يعبر الشقين معاً، فضلاً عن ذلك نجد أن نموذج الانحراف على الشاشة قد تلاشى، ونحصل على توزع مستقر وعريض [الشكل (11d-1)]، الذي يمثل أساساً مجموع تجربتين بشق واحد. ما حصل هو أن الفوتونات من مصدرنا الضوئي، بعد تضخيم الإلكترونات بصفتها منبعثة من الشقين، أثرت في كمية حركة الإلكترونات، وغيرت مساراتها عن تلك المسارات بغياب الضوء. يمكن إجراء عكس ذلك باستخدام فوتونات ذات كمية حركة صغيرة؛ ولكن هذا يعني أن الفوتونات بطاقة منخفضة E، وبطول موجة مرتفع λ، وتبدو النماذج الإلكترونية في النتيجة في المجهر أعرض، وتصبح غامضة أكثر فأكثر بالنسبة إلى الشق الذي يقدم الإلكترون الذي يعبره، أو الذي عبر أحد الشقين بالفعل. كلما كان الشك بمسار كل إلكترون عند تحركه نحو الشقين أكبر، أصبح نموذج الانحراف الحاصل أكثر وضوحاً [الشكل (11e-1)] (قد يمثل المصدر الضوئي أشعة – X أو أشعة – γ لهدف الحصول على طول موجة أقصر مقارنة بالمسافة المناسبة).

توضح هذه التجربة التصورات الأساسية للجمل المجهرية – لا يمكن قياس خصائص الجمل من دون تأثير التطورات اللاحقة للجملة في وسيلة غير عادية. تعد الجملة المضاءة مختلفة اختلافاً واضحاً عن الجملة المعتمة (بطول موجة قصير λ)، ولذلك تصل الإلكترونات إلى الشاشة باضطرابات مختلفة. في هذا المثال، بغياب الضوء، تتلخص المسألة في معرفة كمية حركة كل إلكترون بدقة تامة، ولكن لا يمكننا معرفة أية شيء حول الوسيلة التي تنتقل بها الإلكترونات نحو الشقين. أما بوجود الضوء، فيجب الحصول على معلومات حول موضع الإلكترون قبل الشقين، ولكن

تتبدل كمية حركة كل إلكترون بوسيلة مجهولة. يؤدي قياس موضع الجسيم إلى فقدان المعرفة حول كمية حركته، وهذا ما يمثل مبدأ الارتياب لهيزنبرغ، الذي ينص على أن جداء ارتيابين (لمتغيرين مترافقين)، a و b، يجب أن لا يكون أقل من ثابت بلانك h مقسوما على 4π:

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq h / 4\pi \qquad (46.1)$$

إذ يمثل Δa مقياس الارتياب في المتغير a (يمكن بسهولة تكوين متغيرين مترافقين بملاحظة أن وحداتهما يجب أن تمثل جداء الجول بالثانية (J s). يحقق الزوج كمية الحركة الخطي – الموضع الخطي هذا الشرط. من الأمثلة الأخرى على المتغيرات المترافقة نذكر: الطاقة – الزمن، العزم الزاوي – الموضع). بغياب الضوء، يكون الارتياب في كمية الحركة صغيراً، في حين يكون الارتياب في الموضع كبيراً جداً. وبوجود الضوء، يجب تخفيض الارتياب في الموضع تخفيضاً ملحوظاً، ويكون الارتياب في كمية الحركة كبيراً جداً. وتجدر الإشارة إلى أن الإلكترون والجهاز يمثلان جملة وحيدة، ويتعلق سلوك الإلكترون بصفته موجة أو جسيم بتشوش حالاته أو أوضاعه.

مثال 1-4: إن عمر حياة الحالة المثارة للجزيء يساوي 2×10^{-9} s. ما قيمة الارتياب الحاصل في الطاقة بواحدة الجول (J)؟ وبواحدة cm^{-1}؟ كيف يمكن تبيان ذلك تجريبياً؟

الجواب: يقدم مبدأ الارتياب لهيزينبرغ من أجل الارتياب الأصغري العلاقة الآتية:

$$\Delta E \cdot = \frac{h}{4\pi\,\Delta t} = \frac{6.626\times10^{-34}\text{ J s}}{(4\pi)(2\times10^{-9}\text{ s})} = 2.6\times10^{-26}\text{ J}$$

أو

$$\Delta E = (2.6\times10^{-26}\text{ J})(5.03\times10^{22}\text{ cm}^{-1}\text{ J}^{-1}) = 0.001\text{ cm}^{-1}.$$

إن تعرض العصابة في طيف الإصدار يشير إلى الارتياب الكبير في E.

9-1 معادلة شرودينغر الموجية المستقلة عن الزمن

Schrödinger's Time-Independent Wave Equation

ذكرنا سابقاً أنه نحتاج إلى معادلة الموجة لحل معادلة الأمواج المستقرة العائدة إلى الجملة الجسيمية التقليدية، وكذلك إلى شروطها الحدية. تظهر هذه الضرورة من أجل معادلة الموجة لإيجاد الحلول من أجل الأمواج المادية. حصل العالم شرودينغر على مثل هذه المعادلة بأخذ معادلة الموجة التقليدية المستقلة عن الزمن [العلاقة (21.1) أو (22.1)]، وعوض علاقة دي بروي من أجل λ. عندئذ، إذ كان لدينا:

$$\nabla^2\psi = -(2\pi/\lambda)^2\psi \qquad (47.1)$$

و:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \qquad (48.1)$$

فإن:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \qquad (49.1)$$

إذ إن $\hbar = h/2\pi$. تمثل العلاقة (49.1) معادلة شرودينغر الموجية المستقلة عن الزمن من أجل جسيم وحيد كتلته m، متحرك في حقل كموني ثلاثي الأبعاد V.

لقد فصلنا المعادلة في الميكانيك التقليدي من أجل الحركة الموجية والحركة الجسيمية. أما في الميكانيك الكمومي، الذي يكون فيه الاختلاف بين الجسيمات والأمواج غير واضح، فلدينا معادلة وحيدة – معادلة شرودينغر. نلاحظ أن صلة الوصل بين معادلة شرودينغر ومعادلة الموجة التقليدية تمثل علاقة دي بروي. لنقارن الآن معادلة شرودينغير بمعادلة الموجة التقليدية للحركة الجسيمية. إن الطاقة تمثل تقليدياً من أجل جسيم متحرك في أبعاد ثلاثية مجموع طاقتين حركية وكامنة:

$$(1/2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V = E \qquad (50.1)$$

إذ يمثل p_x المركبة x لمتجهة كمية الحركة $\mathbf{p}$. بإعادة كتابة العلاقة (49.1) على النحو الآتي:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z) \quad (51.1)$$

وبمقارنة العلاقتين (50.1) و (51.1)، نجد أن كمية الحركة التقليدية مرتبطة بـالمؤثر التفاضلي الجزئي:

$$\hat{p}_x \leftrightarrow -i\hbar(\partial/\partial x) \quad (52.1)$$

وبصورة مشابهة يمكن كتابة العلاقة من أجل p_y و p_z. تمثل العلاقة (أو العلاقـات) (52.1)، كما سنلاحظ لاحقاً، أهم مسلمة في صياغة الميكانيك الكمومي المعاصر.

يدعى الطرف الأيسر للعلاقة (50.1) الهاملتون من أجل الجملة. من حيثية هـذا المفهوم يدعى المؤثر الواقع بين قوسين للعلاقة (51.1) المؤثر الهاملتوني $\hat{H}$، أي أن:

$$\hat{H}=\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)$$

سنلاحظ من أجل جملة معينة أن استنتاج المؤثر $\hat{H}$ غير صعب، وتكمن الصعوبة في حل معادلة شرودينغر، التي تكتب عادة على النحو الآتي:

$$\hat{H}\psi=E\psi \quad (53.1)$$

تمثل معادلات الموجة التقليدية، والميكانيكية الكمومية التي ناقشناها نمطاً خاصـاً من المعادلات التي تدعى المعادلات الخاصة، وتضم كل منها الصيغة:

$$\hat{A}f=cf \quad (54.1)$$

إذ يمثل $\hat{A}$ مؤثراً ما، و f تابعاً ما، و c ثابتاً. وهكذا لكل مؤثر تابع خاص، الذي يؤثر فيه، ويعيده من جديد بضربه بثابت ما، ولذلك يدعى التابع f الممثل في العلاقة (54.1) التابع الخاص للمؤثر، ويدعى الثابت c القيمة الخاصة المرافقة للتابع الخاص f. يتمتع المؤثر في أحوال كثيرة بعدد كبير من التوابع الخاصة، والقيم الخاصة الملازمة. لذلك من الضروري وضع دليل لتمييز نوعها:

$$\hat{O}f_i=c_if_i \quad (55.1)$$

لقد ذكرنا سابقاً مثالاً على هذا النوع من التوابع، وهو العلاقة (19.1)، الذي يمثل تابعاً

خاصاً للعلاقة (18.1) بقيمة خاصة تساوي $(-\omega^2 m/T)$، وتدعى الحلول ψ لمعادلة شرودينغر (53.1) التوابع الخاصة أو التوابع الموجية أو توابع الحالة.

مثال 1-5: (a) بيّن أن $\sin(\alpha x)$ لا يمثل تابعاً خاصاً للمؤثر d/dx.
(b) بين أن $\exp(-\alpha i\, x)$ يمثل تابعاً خاصاً للمؤثر d/dx، ما قيمته الخاصة؟
(c) بين أن $\frac{1}{\pi}\sin(\alpha x)$ يمثل تابعاً خاصاً للمؤثر $(-\hbar^2/2m)d^2/dx^2$، ما قيمته الخاصة؟

الجواب: (a) لإظهار أن $\sin(\alpha x)$ لا يمثل تابعاً خاصاً للمؤثر d/dx، يكفي إظهار أن مشتقه بالنسبة إلى x لا يمثل التابع نفسه مضروباً بثابت:

$$\frac{d}{dx}\sin(\alpha x) = \alpha\cos(\alpha x) \neq \text{const.}\times\sin(\alpha x)$$

(b) في هذه الحالة يجب أن يحقق التابع $\exp(-\alpha i\, x)$ العلاقة (54.1):

$$\frac{d}{dx}\exp(-\alpha i\, x) = -\alpha\exp(-\alpha i\, x) = \text{const.}\times\exp(-\alpha i\, x)$$

والقيمة الخاصة تساوي (α).

(c) كذلك الأمر يجب أن يحقق التابع $\frac{1}{\pi}\sin(\alpha x)$ العلاقة (54.1):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{1}{\pi}\sin(\alpha x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{1}{\pi}(\alpha)\frac{d}{dx}\cos(\alpha x)$$
$$= \left(-\frac{\alpha^2\hbar^2}{2m}\right)\frac{1}{\pi}\sin(\alpha x)$$

والقيمة الخاصة تساوي $-\alpha^2\hbar^2/2m$.

10-1 مميزات التابع الموجي ψ — Characteristics on ψ

يمثل مربع التابع الموجي لموجة ضوئية الكثافة الاحتمالية من أجل وجود الفوتونات عند مواضع متغيرة في الفراغ، ويمكننا الآن بصورة مشابهة أن ننسب هذا المعنى الفيزيائي إلى ψ^2 من أجل الأمواج المادية. وهكذا في مسألة أحادية البعد (مثل الجسيم المقيد بالحركة على خط مستقيم)، يعطى احتمال وجود الجسيم في حيز dx

حول النقطة x_1 بالقيمة $\psi^2(x_1)dx$؛ إذا كان ψ تابعاً غير عقدي، أما إذا كان ψ تابعاً عقدياً، فيستخدم المربع المطلق $|\psi|^2=\psi^*\psi$ بدلاً من ψ^2، وهذا ما يجعله من المستحيل أن يأخذ قيمة سالبة في أية منطقة. من الآن فصاعد سنستخدم $|\psi|^2$.

إذا حدّد التابع الخاص من أجل العلاقة (53.1)، نلاحظ بسهولة أن $c\psi$ يمثل تابعاً خاصاً أيضاً من أجل أي ثابت c. إن هذا يوصلنا إلى حقيقة أن الضرب بثابت يمثل عملية تبديلية مع المؤثر؛ أي أن:

$$\hat{H}(c\psi)=c\hat{H}\psi=cE\psi=E(c\psi) \qquad (57.1)$$

تبين المساواة في الحدين الأول والأخير أن $c\psi$ يمثل تابعاً خاصاً للمؤثر الهاملتوني $\hat{H}$. إن السؤال "ما الثابت المضروب بالتابع الموجي؟" يُحل بتطبيق معنى الاحتمال للمقدار $|\psi|^2$. فمن أجل جسيم متحرك على المحور x، يساوي احتمال وجود الجسيم بين $x=-\infty$ و $x=+\infty$ الواحد؛ أي أنه محدد. يساوي هذا الاحتمال مجموع احتمالات وجود الجسيم في كل مجال لامتناه في الصغر حول x أيضاً. وبناءً على ذلك يعبر عن هذا المجموع بالعلاقة الآتية:

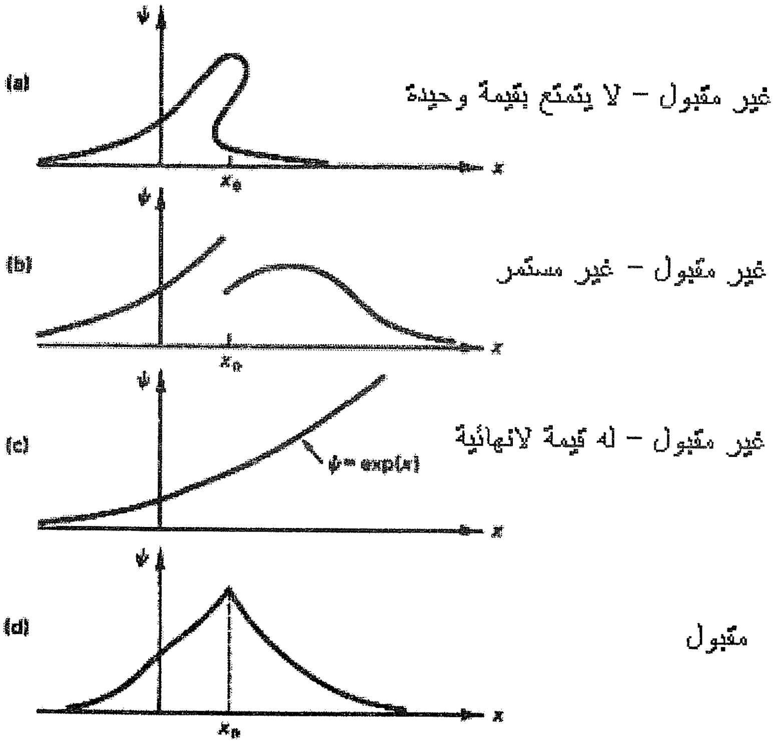
$$c^*c\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx=1 \qquad (58.1)$$

إذا انتقينا الثابت c بحيث تتحقق العلاقة (57.1)، يقال إن التابع الموجي ψ منظم، ويعطى شرط التنظيم من أجل التابع الثلاثي الأبعاد، $c\psi(x,y,z)$ بالعلاقة الآتية:

$$c^*c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,y,z)\psi(x,y,z)dxdydz=|c|^2\int_{\text{all space}}|\psi|^2\,dV=1$$
(58.1)

نتيجةً لتفسيرنا الفيزيائي للمقدار $|\psi|^2$، فضلاً عن حقيقة أن ψ يجب أن يمثل تابعاً خاصاً لمؤثر هملتوني $\hat{H}$، يمكننا التوصل إلى بعض الاستنتاجات العامة حول نمط الخصائص الرياضية التي يتمتع بها ψ، والتي لا يتمتع بها. نحتاج أولاً أن يمثل ψ تابعاً وحيد القيمة؛ لأننا نريد أن يعطي $|\psi|^2$ احتمالاً وحيد القيمة لوجود الجسيم في منطقة محددة [انظر الشكل (12-1)]. نرفض أيضاً التوابع غير المحدودة في أية منطقة

في الفراغ؛ لأن التوابع غير المحدودة تُفقد المعنى الاحتمالي لـ $|\psi|^2$. لكي يكون $\hat{H}\psi$ محدداً في كل مكان، يجب أن يكون المشتق الثاني للتابع ψ محدداً في كل مكان، ويتطلب هذا أن يكون المشتق الأول للتابع ψ مستمراً على الجانبين، وأن يكون ψ في حد ذاته مستمراً أيضاً كما في الشكل (12d-1). تدعى التوابع المتمتعة بقيمة وحيدة، والمستمرة، ومتناهية ليس في أي مكان، ومتمتعة أيضاً بمشتق أول مستمر، التوابع المقبولة فيزيائياً. يوضح الشكل (12.1) معنى هذه المصطلحات باستخدام بعض التوابع. في معظم الحالات، يوجد أكثر من تقيد عام مطبق على ψ، ونعني بذلك وجوب أن يكون التابع منظماً. هذا يعني أن تكامل $|\psi|^2$ على جميع الفراغ يجب أن لا يساوي الصفر أو لامتناهياً. يقال إن التابع الذي يحقق هذا الشرط قابل للتكامل تربيعياً.



الشكل (12-1): (a) تابع ψ ثلاثي القيمة عند x_0. (a) تابع ψ غير مستمر. (c) تابع ψ متصاعد بلا حدود عندما يقترب x إلى $+\infty$، (d) تابع ψ مستمر ذو نهاية عظمى عند x_0، وهو مقبول؛ لأن المشتق الأول لـ ψ عند x_0 غير مستمر.

11-1 ملخص Summary

سنلخص في هذه الفقرة النقاط الرئيسة التي ستستخدم في المناقشات اللاحقة:

1. لأي جسيم تابع موجي متمتع بطول موجة مرتبط بكمية حركته بالعلاقة $\lambda = h/p = h/\sqrt{2m(E-V)}$.
2. يتمتع التابع الموجي بالمعنى الفيزيائي الآتي: يتناسب مربعه المطلق $|\psi|^2$ مع الكثافة الاحتمالية لوجود الجسيم. إذا كان التابع الموجي منظم، فإن مربعه يساوي الكثافة الاحتمالية.
3. تمثل التوابع الموجية ψ من أجل الحالات المستقلة عن الزمن توابع خاصة لمعادلة شرودينغر، التي يمكن استنتاجها من معادلة الموجة التقليدية بأخذ $\lambda = h/\sqrt{2m(E-V)}$، أو من المعادلة الجسيمية التقليدية بتعويض $\hat{p}_k$ بالمقدار $(h/2\pi i)\partial/\partial k$؛ إذ إن $k = x, y, z$.
4. لكي يكون ψ مقبولاً، يجب أن يكون وحيد القيمة، ومستمراً، ومحدوداً، وأن يكون مشتقه الأول مستمراً على الجانبين، ولمعظم الحالات يتطلب أن يكون ψ قابلاً للتكامل تربيعياً.
5. يجب أن يكون التابع الموجي لجسيم في كمون متغير سريع الانحدار عندما يكون V منخفضة، بإعطاء T قيمة عالية في هذه المنطقة. إذ تمثل E مجموع V المنخفضة وT المرتفعة. وفي مناطق أخرى، عندما تكون عندها قيمة V مرتفعة، تمثل E نفسها كما في المنطقة الأولى.

أسئلة وتمارين

1-1 عبر عن التابع $A\cos(kx)+B\sin(kx)+C\exp(ikx)+D\exp(-ikx)$ بدلالة $\sin(kx)$ و $\cos(kx)$.

2-1 قم بإعادة حل مسألة الموجة المستقرة في سلك، المذكورة في الفقرة 1-4، ولكن بتثبيت السلك عند $x=+L/2$ و $x=-L/2$ بدلا من 0 و L.

3-1 أوجـد الـشرط الـذي يجـب تحقيقـه بوسـاطة α و β لجعـل التـابع $\psi(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\beta x)$ يحقق العلاقة (20.1).

4-1 إن الجهاز المرسوم في الشكل (1-10) يستخدم مع صحن مطلي بالزنك، وكذلك مع صحن مطلي بالسيزيوم. يمثل الجدول (4-1P) أطوال موجة الضوء الوارد، وكمونات الإيقاف الضرورية لإعاقة وصول الإلكترونات الضوئية إلـى سـلك التجميع. ارسم تغير تواتر الضوء الوارد بدلالة كمون الإعاقة من أجل هـذين المعدنين، ثم قدّر تابعي عملهما W وثابت التناسب بواحدة (eV s).

الجدول (4-1P)

λ(Å)	كمون الإيقاف (V)	
	Cs	Zn
6000	0.167	-
3000	2.235	0.435
2000	4.302	2.502
1500	6.369	1.567
1200	8.436	6.636

5-1 احسب طول موجة دي بروي بالنانومتر من أجل كل مما يأتي:

(a) إلكترون مسرع من نقطة السكون عبر كمون متغير قدره 500 V.

(b) كرة صغيرة؛ وزنها 5 gm، تنطلق بسرعة قدرها $400\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

6-1 تبعاً للعلاقة (7.1)، ما الزمن اللازم لانتقال موجة مستقرة عبـر حلقـة كاملـة واحدة؟

7-1 تتمتع معادلة الموجة المستقرة في سلك بالصيغة الآتية:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\cos(\omega t)$$

(a) احسب الطاقة الكامنة الوسطية (PE) من أجل هـذه الحركـة (ملاحظـة: استخدم $\mathrm{PE} = -\int F d\Psi;\ F = ma;\ a = \partial^2\Psi / dt^2$).

(b) احسب الطاقة الحركية الوسطية (KE) من أجل هذه الحركـة (ملاحظـة: استخدم $\mathrm{KE} = \frac{1}{2}mv^2$، و $v = \partial / \partial t$).

(c) بين أن السلك المهتز توافقياً يصرف نصف طاقته بمعدل وسطي على شكل طاقـــة حركيـــة، والنـــصف الآخـــر علـــى شـــكل طاقـــة كامنـــة، وأن $E(x)_{\text{av}} = \alpha\psi^2(x)$.

1-8 حدد التابع الذي يحقق شروط التابع الموجي (أي التابع المقبول فيزيائيـــاً) مـــن التوابع الآتية، وإذا لم يكن محققاً، وضح السبب:

(a) $\psi = x$.

(b) $\psi = x^2$.

(c) $\psi = \sin x$.

(d) $\psi = \exp(-x)$.

(e) $\psi = \exp(-x^2)$.

1-9 يجب أن يعد التابع المقبول فيزيائيا لامتناهياً على الإطلاق. هل هذا يعنـــي أن التابع الموجي يجب أن يكون قابلاً للتكامل تربيعياً؟ إذا لم يكـــن هـــذا الأمـــر ضرورياً، حاول إيجاد مثال على تابع (مغاير للصفر) لامتناهٍ علـــى الإطـــلاق، ولكنه قابل للتكامل تربيعياً.

1-10 وضح حقيقة أن التابع $\sin(x) = -\sin(-x)$ يقيد العلاقة (32.1) عند القيم n غير السالبة من دون أن يفقد المعنى الفيزيائي.

1-11 ما التابع من التوابع الآتية يمثل تابعاً خاصاً لـــ d/dx؟

(a) x^2.

(b) $\exp(-3.4x^2)$.

(c) 37.

(d) $\exp(x)$.

(e) $\sin(ax)$.

(f) $\cos(4x) + i\sin(4x)$

1-12 احسب طول موجة دي بروي الأصغري من أجـــل الإلكترونـــات الـــضوئية الناشئة عندما يصطدم الضوء بطول موجة 140.0 nm بمعدن الزنك (مع العلم أن تابع العمل للزنك يساوي 3.63 eV).

أجب عن الأسئلة الآتية باختيار الجواب الصحيح:

13-1 يجب أن تتمتع معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن لجسيم:

(a) بتابع خاص غير منظم.

(b) بطاقة كامنة مستقلة عن الموضع.

(c) بطول موجة دي بروي مستقل عن الموضع.

(d) بطاقة كلية مستقلة عن الموضع.

(e) لا تمثل أي عبارة من العبارات أعلاه تعبيراً صحيحاً.

14-1 عندما يمثل d^2/dx^2 أحد المؤثرات للتابع $6\sin(4x)$، وجد أن:

(a) التابع يمثل تابعاً خاصاً بقيمة خاصة قدرها -96.

(b) التابع يمثل تابعاً خاصاً بقيمة خاصة قدرها -16.

(c) التابع لا يتمتع بقيمة خاصة.

(d) لا تمثل أي عبارة من العبارات أعلاه تعبيراً صحيحاً.

15-1 ما العبارة التي تدل ضمنياً على مفهوم آينشتاين لوصف المفعول الكهرضوئي:

(a) يتمتع جسيم ذات كتلة سكونية m، وسرعة v بطول موجة تعطى بالعلاقة $\lambda = h/mv$.

(b) بمضاعفة شدة الضوء، تتضاعف طاقة كل فوتون.

(c) بزيادة طول موجة الضوء، تتزايد طاقة كل فوتون.

(d) تمثل الإلكترونات الضوئية جسيمات.

(e) لا تمثل أي عبارة من العبارات أعلاه المفهوم الذي اقترح آينشتاين لوصف المفعول الكهرضوئي.

16-1 يصطدم الضوء بتواتر ν المعدن، مسبباً إصدار إلكترونات ضوئية متمتعة بطاقة حركية أصغرية قدرها $0.90h\nu$. من هذا المفهوم يمكن ملاحظة أن:

(a) الضوء بتواتر قدره $\nu/2$ لا يسبب إصدار إلكترونات ضوئية.

(b) الضوء بتواتر قدره 2ν يسبب إصدار إلكترونات ضوئية بطاقة حركية أصغرية قدرها $1.80h\nu$.

(c) بمضاعفة شدة الضوء ذي التواتر ν، ستتمتع الإلكترونات الضوئية الناشئة بطاقة حركية أعظمية قدرها $1.80\,h\nu$.

(d) تابع العمل للمعدن يساوي $0.90\,h\nu$.

(e) لا تمثل أي عبارة من العبارات أعلاه تعبيراً صحيحاً.

17-1 إن سبب تنظيم التابع ψ هو:

(a) جعل التابع ψ قابلاً للتكامل تربيعياً.

(b) جعل $\psi^*\psi$ مساويا إلى احتمال تابع التوزع للجسيم.

(c) جعل التابع ψ تابعاً خاصاً للمؤثر الهاملتوني.

(d) جعل التابع ψ محققاً للشروط الحدية للمسألة.