كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: لتكن E مجموعة كيفية منه العناصر، نرمز بـ P(E) لأسرة المجموعات الجزئية ولتكن $\tau \subseteq P(E)$ أسرة جزئية ما بحيث أنه

1. $\varphi, E \in \tau$
2. $G, T \in \tau$ أيا كانت G و T من τ
3. أيا كانت $\{G_i : i \in I\}$ أسرة جزئية من τ فإن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

(بمعنى أي اجتماع لعناصر من τ هو عنصر من τ)

* إذا تحققت الشروط الثلاث عندئذ يمكن القول أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على المجموعة E
* تسمى الثنائية (E, τ) فضاءاً تبولوجياً"

تسمى عناصر E نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) أما عناصر التبولوجيا τ تسمى مجموعات مفتوحة في الفضاء (E, τ)

ملاحظات ونتائج وأمثلة

1. إذا كانت $E = \varphi$ هل يمكن تعريف تبولوجيا على E؟
$\tau = P(E) = \{E\} = \{\varphi\}$.

بما أن τ تحقق تعريف التبولوجيا أي أن τ تعرف تبولوجيا على τ

2. تعميم الشرط الثاني من تعريف التبولوجيا

لتكن $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ أسرة كيفية من عناصر التبولوجيا τ

عندئذٍ نجد أنّه

$G'_1 = G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$ ؛ ~~$G_2 \in \mathcal{T}$~~ $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow G'_2 = G'_1 \cap G_3 \in \mathcal{T}$ ؛ $G'_1, G_3 \in \mathcal{T}$

$G'_3 = G'_2 \cap G_4 \in \mathcal{T}$ ؛ $G'_2, G_4 \in \mathcal{T}$

$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G \in \mathcal{T}$

أي أنّ أي تقاطع لعناصر من $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$

ملاحظة:

التبولوجيا $\mathcal{T} = \{\varphi\}$ ليست لها أي قيمة عملية أو تطبيقية لذلك سنة الآن سنفرض عند ذكر تبولوجيا "على E" أو غير ذلك.

مثال: نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة

$$\mathcal{T} = \{T \in P(\mathbb{N}) ; 1 \in T\} \cup \varphi$$

أثبت أنّ $\mathcal{T}$ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$

الحلّ:

نتحقق من شروط التبولوجيا

① لدينا من تعريف الأسرة $\mathcal{T}$ أي أنّ $\varphi \in \mathcal{T}$

* $\mathbb{N} \in \mathcal{T} \Leftarrow 1 \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N} \in P(\mathbb{N})$

بالتالي الشرط الأوّل محقق.

② نميّز حالتين

A- $T = \varphi$ أو $G = \varphi$ أو كلاهما $\Rightarrow T \cap G = \varphi \in \mathcal{T}$

B- $T \neq \varphi$ ؛ $G \neq \varphi$

$$\left.\begin{array}{l} T \in P(\mathbb{N}) ; 1 \in T \\ G \in P(\mathbb{N}) ; 1 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T \cap G \in P(\mathbb{N}) \\ 1 \in T \cap G \Rightarrow \\ T \cap G \in \mathcal{T} \end{array}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ج- لتكن $\{G_i, i \in I\}$ أسرة جزئية من τ تميز حالتين:

A) $G_i = \phi$

$\bigcup G_i = \phi \in \tau \; I G_i = \phi$

B) نفرض لدينا مجموعة واحدة على الأقل لا تساوي الخالية

مثلاً $G_{i_0} \neq \phi$

$G_{i_0} \in P(N)$; $1 \in G_{i_0}$

$G_{i_0} \subseteq G_i \Rightarrow 1 \in G \in P(N)$ $\quad i \in I$

ولدينا $\bigcup_{\in I} G_i \in \tau$ فالشرط الثالث محقق ..

مثال: لتكن لدينا المجموعة $E = \{a, b, c\}$ نعرّف الأسرة $\tau = \{E, \phi, \{a\}, \{a,b\}\}$ أثبت أنّه τ تعرّف توبولوجيا على E

الحلّ: نتحقق من شروط التوبولوجيا

1- من تعريف τ لدينا $E, \phi \in \tau$ والشرط الأوّل محقق

2- $\phi \cap \phi = \phi \in \tau$

$E \cap E = E \in \tau$

$E \cap \phi = \phi \in \tau$

$E \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$

$E \cap \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$

$\phi \cap \{a\} = \phi \in \tau$

$\phi \cap \{a,b\} = \phi \in \tau$

$\{a\} \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$

$\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \tau$

$\{a,b\} \cap \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau \Rightarrow T \cap G \in \tau \; \forall T, G \in \tau$

فالشرط الثاني محقق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Phi \cap T = T \in \tau \quad \forall T \in \tau$ (3)

$E \cup T = E \in \tau \quad \forall T \in \tau$

$\{a\} \cup \{a\} = \{a\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$

$E \cup \{a\} \cup \{a,b\} = E \in \tau$

$\{a\} \cup \{a,b\} \cup \Phi = \{a,b\} \in \tau$

$E \cup \{a\} \cup \{a,b\} \cup \Phi = E \in \tau$

• ما سبق نجد أن τ تعرّف توبولوجيا على E ومنه

$\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau \; ; G_i \in \tau$

فالشرط الثالث محقق ومنه مما سبق نجد أن τ تعرف توبولوجيا على E

مثال: لتكن لدينا المجموعة $E + \Phi$ نعرّف عليها الاسرتين

$\tau_1 = \{E, \Phi\}, \; \tau_2 = P(\mathbb{N})$

اثبت أن كلاً من τ_1 و τ_2 تعرّف توبولوجيا على I

الحل: من الواضح تحقق كون τ_1 تعرّف توبولوجيا على E حيث نسمي التوبولوجيا $\tau_1 = \{E, \Phi\}$ بالتوبولوجيا الضعيفة

* τ_2 تحقق من $E, \Phi \in \tau = P(E) \Leftarrow E, \Phi \in P(E)$

والشرط الأول محقق

(2 $T \cap G \in \tau \in T \cap G \in P(E)$

$T, G \in \tau = P(E)$ والشرط الثاني محقق.

(3 لتكن $\{G_i, i \in I\}$ أسرة جزئية من $\tau_2 = P(E)$ أي

$G_i \in P(E) \Leftarrow \left(\bigcup_{i \in I} G_i \in P(E) = \tau\right)$

فالشرط الثالث محقق.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مما سبق نجد أن $T_2 = P(E)$ تعرف توبولوجيا على E وتسمى بالتوبولوجيا القوية

* نستنتج من الأمثلة أنه يمكن تعريف أكثر من توبولوجيا في الحالة العامة.

* تتساوى التوبولوجيا الضعيفة والقوية على مجموعة غير خالية إذا وفقط إذا كانت E تحتوي على عنصر واحد فقط.

تعريف: إذا كانت T_1 و T_2 توبولوجيتين معرفتين على مجموعة E بحيث أن $T_1 \subset T_2$ عندئذ يقال أن التوبولوجيا T_1 أضعف من التوبولوجيا T_2 أو التوبولوجيا T_2 أقوى من التوبولوجيا T_1 ونرمز لذلك بـ $T_1 \leq T_2$

ملاحظة: أياً كانت T توبولوجيا معرفة على E فحسب الشرط الأول من تعريف التوبولوجيا لدينا $\{E, \varphi\} \subset T \subset E, \varphi \in I$ أي أن $\{E, \varphi\}$ أضعف من T هذا يعني أن $\{E, \varphi\}$ أضعف من أي توبولوجيا أخرى معرفة على E لذلك سميت بالتوبولوجيا الضعيفة.

ملاحظة: من تعريف التوبولوجيا لدينا أياً كانت T توبولوجيا على E فإن $T \subset P(E)$ لذلك فإن التوبولوجيا $P(E)$ أقوى من أي توبولوجيا على E وهذا السبب في تسميتها بالتوبولوجيا القوية

مثال: لتكن لدينا المجموعة $E = \{a, b, c\}$ عرف عليها ثلاثة توبولوجيات ثم قارن بين هذه التوبولوجيات

$T_1 = \{E, \varphi, \{a, b\}\}$ ، $T_2 = \{E, \varphi, \{a\}, \{a, b\}\}$

$T_3 = \{E, \varphi, \{b\}, \{a, b\}\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أنّه $T_1 \subset T_2$ و $T_1 \subset T_3$

$\{a\} \in T_2$ لأنّ $T_2 \not\subset T_3$ ولكنه $\{a\} \notin T_3$

و نجد أيضاً $T_3 \not\subset T_1$ لأنّ يوجد العنصر $\{b\} \in T_3$ ولكنه $\{b^2 \notin T_2\}$

C2- أعطِ توبولوجيا أقوى من T_2 وأضعف من T_3

$T_4 = \{E, \varphi, \{a\}, \{a,b\}, \{c,a\}\}$; $T_2 \subset T_4$

* توبولوجيا غير الضعيفة بحيث تكون أضعف من T_3

$T_6 = \{E, \varphi, \{b\}\}$; $T_6 \subset T_2$

أو $T_7 = \{E, \varphi, \{a,b\}\}$; $T_7 \subset T_2$

بعض خواص المجموعات المفتوحة

① - من تعريف المجموعات المفتوحة ومن الشرط الأول لتعريف التوبولوجيا $E, \varphi \in T$ أي ينتج أنّ E, φ مجموعتان مفتوحتان في أي فضاء توبولوجي (E, φ)

② - من الشرط الثاني المعمم ومن تعريف المجموعات المفتوحة ينتج مباشرة أنّ أي تقاطع منتهي لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في أي فضاء توبولوجي (E, T)

③ - إنّ أي اجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة من أي فضاء توبولوجي وذلك ينتج مباشرة من تعريف المجموعة المفتوحة والشرط الثالث في تعريف التوبولوجيا.

تعريف:

ليكن (E, T) فضاء توبولوجي كيفي، وليكن A مجموعة كيفية من نقاط هذا الفضاء $(A \subset E)$ يقال عن مجموعة A أنّها مجموعة مغلقة في الفضاء إذا وفقط إذا كانت متممتها بالنسبة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

F أ- ~~[illegible]~~ مجموعة مفتوحة في (E,T) (أو A) $(E$

* يرمز بـ F لأسرة جميع المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي (E,T)

مثال: ليكن لدينا المجموعة $E=\{1,3,5,12\}$ والتبولوجيا المعرفة عليها بالشكل

$$T=\{E,\varphi,\{1,3\},\{3,12\},\{(1,3,12)\}\}$$

* هي اسرة المجموعات المغلقة في (E,T)

$$F=\{\varphi,E,\{5,12\},\{1,5\},\{5\}\}$$

مثال: نعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة التبولوجيا T بالشكل

$$T=\{T\in P(\mathbb{Z}) : \{-2,3\}\subset\{T\}\cup\{\varphi\}$$

هي F أسرة المجموعات المغلقة (E,T)

$$T=\{-2,3,4\},\ G=\{-2,-1,0,1,2,\dots,13\}$$

$$H=\mathbb{Z}\setminus\{5\},\ K=\mathbb{Z}\setminus\{6,7,\dots,100\}$$

$$F=\{F\in P(\mathbb{Z}) : \{-2,3\}\not\subset F\}\cup\{\mathbb{Z}\}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة