كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

٢٠٢٦

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

العلاقات الثنائية:

تعريف: لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين ندعو كل مجموعة جزئية R من الجداء الديكارتي AxB علاقة ثنائية من A إلى B وندعو المجموعة A منطلق العلاقة R و B مستقرها ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي:

$$R = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

والذي يعني أن $R \subset A \times B$

تعريف العلاقة العكسية: لتكن R علاقة ثنائية معرفة من A إلى B نعرف العلاقة العكسية للعلاقة R ونرمز لها بالرمز R^{-1} ونعرف بأنها علاقة من B إلى A تضم جميع الثنائيات (y,x) من $B \times A$ بحيث أن $(x,y) \in R$ ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي:

$$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A : (x,y) \in R\}$$

ونلاحظ أن R^{-1} مجموعة جزئية من $B \times A$ أي $R^{-1} \subset B \times A$

مثال:

$A = \{2, 3, 12\}$, $B = \{4, 7\}$

$$A \times B = \{(2,4), (2,7), (3,4), (3,7), (12,4), (12,7)\}$$

$$R_1 = \{(2,4), (2,7), (12,4)\} \subset A \times B.$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$R_2 = \{(2,4), (3,7), (12,4), (12,7)\}$

R_2 علاقة ثنائية من A إلى B أوجد R_1^{-1} و R_2^{-1}

$R_1^{-1} = \{(4,2), (7,2), (4,12)\}$

$R_2^{-1} = \{(4,2), (7,3), (4,12), (7,12)\}$

تعريف العلاقة الثنائية على مجموعة غير خالية:

عندما $A = B$ عندئذٍ نقول R علاقة ثنائية على المجموعة A وسنتعامل في دراستنا القادمة مع هذا النوع من العلاقات فقط إلا إذا ذكرنا عكس ذلك أي أن العلاقة الثنائية المعرفة على مجموعة ما A غير خالية نعرفها بالشكل التالي رياضياً:

$R = \{(x,y) ; x \in A \wedge y \in A\} \subset A \times A$

إذا كانت R علاقة ثنائية على المجموعة A و $A \neq \varphi$ وكان x و y عنصرين من A عندئذٍ يكون لدينا الحالتان الآتيتان

الحالة الأولى: إذا كان $(x,y) \in R$ عندئذٍ نقول أن العنصر y يرتبط بالعنصر x وفق العلاقة R ونكتب ذلك رياضياً بالشكل

$xRy ; x,y \in A$

أو بالشكل

$x,y \in A ; (x,y) \in R \Leftrightarrow xRy$

الحالة الثانية: إذا كان $(x,y) \notin R$ عندئذٍ نقول أن العنصر y لا يرتبط بالعنصر x وفق العلاقة R أو أن العلاقة R غير محققة بين العنصرين x و y من A ونكتب

$x \not R y ; x,y \in A$ أو $x R y ; x,y \in A$

ويمكن كتابة الحالة السابقة بشكل رياضي كما يلي

$x,y \in A ; (x,y) \notin R \Leftrightarrow x \not R y$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لنأخذ العلاقة $R=\{(2,4),(3,7),(12,7)\}$ علاقة ثنائية على المجموعة $A=\{2,3,4,7,12,15,17\}$

إنه $(3,7)\in R$ إذاً العنصر 7 يرتبط بالعنصر R ونكتب $3R7$ وكذلك الأمر بالنسبة لـ $(2,4)$ و $(12,7)$ أما كمثال على الحالة الثانية إذا أخذنا $(7,15)$ يأننا نلاحظ أنه $(7,15)\notin R$ إذاً نقول إنه العلاقة R غير محققة بين العنصرين $(7,15)$ أو نقول أنه العنصر 5 لا يرتبط بالعنصر 7 وفق العلاقة R ونكتب $7R15$ أو $7,15\in A$

~~العلاقة القطرية~~

العلاقة القطرية: إذا كانت $R=\{(a,a);a\in A\}\subset A\times A$ المعرفة على A بالعلاقة القطرية

مثال: إذا كانت $A=\{2,4,7,15\}$ فإن $R=\{(2,2),(7,7)\}$ علاقة قطرية

ملاحظة: يمكن تعريف أكثر من علاقة على المجموعة نفسها

خواص العلاقات الثنائية:

إذا كانت R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة A و A غير خالية غير كذلك:

1- الخاصة الانعكاسية (العلاقة الإنعكاسية): نقول عن العلاقة R أنها انعكاسية إذا تحقق الشرط التالي

$aRa;\forall a\in A$

أو بالشكل: $\forall a\in A;aRa$

أو بالشكل: $\forall a\in A;(a,a)\in R$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- الخاصة التناظرية (العلاقة التناظرية):

نقول عن العلاقة R أنها علاقة تناظرية إذا تحقق الشرط التالي:

$\forall a,b \in R, if\ aRb \Rightarrow bRa$

أو بالشكل

$\forall a,b \in A, if\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

3- الخاصة التخالفية (العلاقة التخالفية): نقول عنه R أنها علاقة تخالفية إذا تحقق الشرط التالي

$\forall a,b \in A, if\ aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b.$

أو بالشكل $\forall a,b \in A, if (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

4- الخاصة المتعدية (العلاقة المتعدية): نقول عن العلاقة R أنها علاقة متعدية إذا تحقق الشرط

$\forall a,b,c \in A, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

أو بالشكل

$\forall a,b,c \in A, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R.$

ملاحظة: تُعد علاقة التكافؤ وعلاقة الترتيب أهم العلاقات الثنائية المعرفة على مجموعة ما غير خالية وسندرس كل منهما بالتفصيل في المحاضرات القادمة

مثال: لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بالشكل التالي

$xRy \Rightarrow x+y = 1, x,y \in \mathbb{N}$

والمطلوب تحقق من خواص العلاقة الثنائية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحالة:

العلاقة الإنعكاسية

1- العلاقة R انعكاسية إذا وفقط إذا

$\forall x \in A \Rightarrow xRx$.

إن العلاقة R المعرفة على N لا تحقق شرط الإنعكاسية

أي العلاقة R ليست علاقة انعكاسية لأنه إذا أخذنا

العدد الطبيعي $3+3=6+1$

$(3,3) \notin R$ أو $3 \overline{R} 3$

2- الخاصة التناظرية

$\forall x,y \in A ; (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

لدينا $\forall x,y \in A ; (x,y) \in R \Rightarrow x+y=1 \Leftrightarrow y+x=1$

$(y,x) \in R$

بالتالي R علاقة تناظرية

3- R علاقة متعدية R متعدية إذا وفقط إذا

$\forall x,y,z \in A ; xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xRz$

ولكنه R ليست متعدية لأنه إذا أخذنا $x=9$ و $y=1$

حيث $z=9$

$xRy \wedge yRz \Rightarrow x+y=9+1=10$

$\wedge \; y+z=1+9=10$

لكن xRz

$x+z=9+9=18$

ومنه R ليست متعدية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نستنتج أن P ليست انكماسية وليست متمددة ولكنها تناظرية (سنأخذها في المحاضرة القادمة)

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960