كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : كهرباء ومغناطيسية٢

المحاضرة : االسابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

٩

معادلات ماكسويل والموجات الكهرومغناطيسية

Maxwell's Equations and Electromagnetic Waves

● مقدمة ● تيار الإزاحة ● معادلات ماكسويل ● الموجات الكهرومغناطيسية في الحيز الفارغ ● الموجات المستوية في وسط عازل متماثل الخواص ● طاقة الموجات الكهرومغناطيسية ● امتصاص الموجات المستوية في الموصلات والتأثير السطحي ● طيف الموجات الكهرومغناطيسية ● مسائل.

(٩-١) مقدمة

Introduction

دُرست في الفصول السابقة الحقائق الأساسية عن الكهربية والمغناطيسية وستدرس في هذا الفصل نظريات جيمس ماكسويل (James C. Maxwell) الذي ربط بين هذين الموضوعين.

دُرس في الفصل السادس اكتشاف فراداي للمجال الكهربي الحثي الناتج عن تغيير المجال المغناطيسي وكان تفسيره في حدود خطوط القوى الذي لم يكن مرضيا بصورة كافية لمعاصريه بينما نجح ماكسويل في وضع معادلة رياضية مشتقة من قانون فراداي

الحثي لتفسير ذلك إلى جانب التنبؤ بالحصول على مجال مغناطيسي حثي نتيجة لتغير المجال الكهربي مع الزمن وذلك باكتشافه لتيار الإزاحة (displacement current) الذي ربط بين النظريات الكهربية والنظريات المغناطيسية.

ربط ماكسويل هذه النظريات بأربع معادلات رياضية تشتمل على المجالات الكهربية والمجالات المغناطيسية وتوزيع الشحنات وكثافة التيار والتي يشار إليها بمعادلات ماكسويل.

كما تنبأ ماكسويل نظريا بوجود الموجات الكهرومغناطيسية ووحد بين موضوعي الضوء والكهرومغناطيسية حيث أوضح أن الموجات الكهرومغناطيسية تسير بسرعة تساوي تقريبا سرعة الضوء وأن الضوء موجات كهرومغناطيسية.

ثم جاء هيرتز (H. Hertz) الذي استطاع أن يثبت نظريات ماكسويل باكتشافه عمليا توليد واستقبال الموجات الكهرومغناطيسية.

(٩-٢) تيار الإزاحة

Displacement current

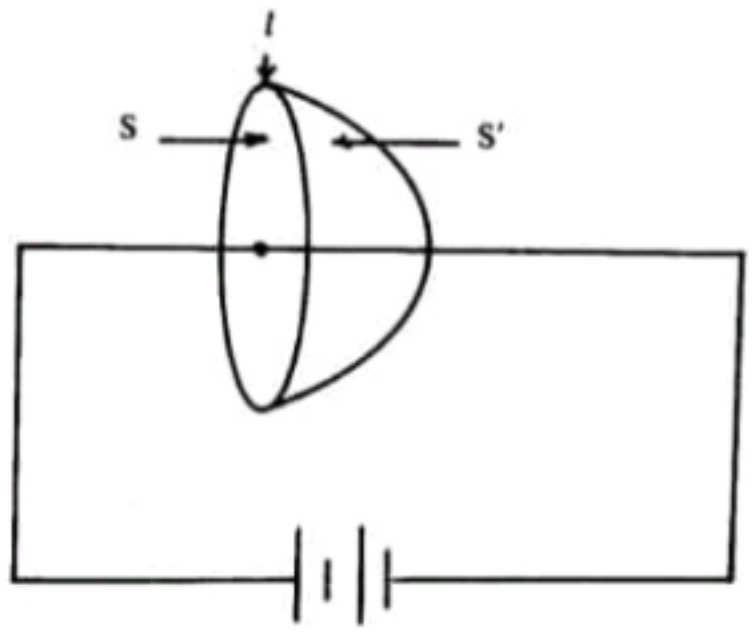
ينتج عن حركة الشحنات الحرة في أي موصل مجال مغناطيسي يظهر أثره في المنطقة المحيطة بالموصل كما ورد ذلك في الفصل الخامس، تسمى الشحنات المتحركة بالكترونات التوصيل (conduction electrons) والتيار الذي يظهر نتيجة للحركة يسمى بتيار التوصيل وسيرمز له في هذا البند بالرمز I_c. ويحسب الحث المغناطيسي بمعرفة تيار التوصيل باستعمال قانون أمبير الدوائري، معادلة (٢٢-٥)، وهو:

$$\oint B.dl = \mu_0 I_c = \mu_0 \int_s J_c\, ds \quad \ldots\ldots \quad (٩-١)$$

حيث إن التكامل الخطي مأخوذ حول مسار مغلق وأن التكامل السطحي مأخوذ على أي سطح محاط بمسار التكامل الخطي. والتكامل السطحي لكثافة التيار J هو عبارة عن مجموع التيار المار خلال المسار للتكامل الخطي. فإذا اختير المسار فإن قيمة الحث

المغناطيسي B يكون ثابتا ويتجه موازيا للمسار. وقد عرف استخدام قانون أمبير لحساب الحث المغناطيسي في البند (٥-٥).

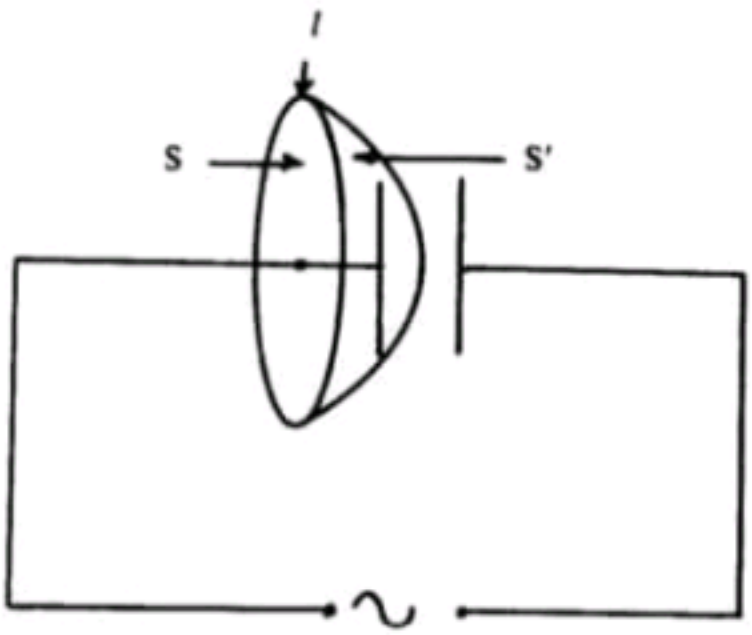
يوضح الشكل (١-٩) أن أي سطح محاط بمسار مغلق للتكامل الخطي يعطي النتيجة نفسها حيث إن المستويين السطحي S أو نصف الكروي S′ محاطان بالمسار المغلق نفسه.



شكل (١-٩): مساحتان S و S′ محاطتان بخط مقفل I. والتكامل $\int B.ds$ لـ $\mu_0 I$ له القيمة نفسها على أي مساحة محاطة بالخط نفسه.

وإذا استبدلت البطارية بمصدر جهد متردد ووضع مكثف مستو في الدائرة كما في الشكل (٢-٩) فإن التيار المتردد سيمر خلال المكثف دون انتقال للشحنات بين صفيحتي المكثف. وقد اختار ماكسويل السطحين الواردين في الشكل (٢-٩) والسبب في ذلك هو أنه بالنسبة للسطح المستوي S يمكن تطبيق المعادلة (١-٩) ولكن بالنسبة للسطح نصف الكروي S′ فإن قيمة التكامل تساوي الصفر. وعالج ماكسويل هذا التناقض فافترض وجود حد آخر في المعادلة (١-٩) بحيث أن التغير في المجال الكهربي الحاصل في المكثف ينتج عنه تيار حقيقي يعطي مجالا مغناطيسيا.

إضافة لتغيير الصيغة الرياضية فإن افتراض ماكسويل يوضح أنه إذا تغير المجال الكهربي مع الزمن في أي منطقة ينتج عن ذلك مجال مغناطيسي هذا الافتراض لا يعطي



شكل (٢-٩): استبدلت البطارية الواردة في الشكل (١-٩) بمصدر جهد متردد كما أضيف للشكل مكثف مستو. التكامل $\int B.dl$ للسطح S يساوي I بينما للسطح نصف الكروي S' يساوي الصفر ما لم يؤخذ في الحسبان تيار الإزاحة.

فقط المعنى المزدوج للمعادلة (١-٩) في حالة التيار المتردد بل إنه يقترح مصدرا آخر جديدا للحصول على مجال مغناطيسي.

التيار المار خلال المكثف المستوي الذي سعته C ومساحة كل من لوحيه S هو:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\because q = S\sigma \ , \ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d\sigma}{dt}$$

$$\therefore I = S\varepsilon_0\frac{dE}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢)$$

هذا المقدار هو الذي يمكن إضافته للمعادلة (١-٩) ويسمى بتيار الازاحة ويرمز له بالرمز I_d وبذلك فإن كثافة تيار الازاحة هو:

$$J_d = \varepsilon_0\frac{dE}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩-٣)$$

وكثافة التيار الكلية هي :

$$J = J_d + J_c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٤)$$

$$\therefore \oint B.dl = \mu_0 \int (J_d + J_c) \, . \, dS$$

$$= \mu_0 \int J_d \, . \, dS + \mu_0 \int J_c \, . \, dS$$

$$\therefore \oint B.dl = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{dE}{dt} \, . \, dS + \mu_0 \int J_c \, . \, dS \quad \ldots \quad (٩-٥)$$

وحسب المعادلة (٤٣-٣) فإن قيمة الإزاحة هي :

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$\therefore \oint B.dl = \mu_0 \int \frac{dD}{dt} \, . \, dS + \mu_0 \int J_c \, . \, dS \quad \ldots \quad (٩-٦)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل للحث المغناطيسي.

ويمكن كتابة المعادلة (٩-٦) بدلالة المجال المغناطيسي H والازاحة D حيث :

$$\oint H.dl = \int \frac{dD}{dt} \, . \, dS + \int J \, . \, dS \quad \ldots\ldots \quad (٩-٧)$$

وحسب المعادلة (٢٥-٥) فإن المعادلتين التفاضليتين للمعادلتين (٩-٦) و(٩-٧) هما :

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \mu_0 J \quad \ldots\ldots \quad (٩ - ١٨)$$

$$\nabla \times H = \frac{dD}{dt} + J \quad \ldots\ldots \quad (٩ - ٨ب)$$

ويحذف غالبا حرف c الدالة على تيار التوصيل بحيث يعرف ضمنا أن J يقصد بها تيار التوصيل.

مثال (١-٩)

إذا كانت الشحنة المعطاة على مكثف مستو دائري تمثلها المعادلة:

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$

حيث C سعة المكثف، R مقاومة خارجية في الدائرة وكانت r_0 نصف قطر القرص الدائري فاحسب:

ا ـ مجموع تيار الإزاحة بين صفيحتي المكثف إذا فرض أن المجال الكهربي بينهما منتظما.

ب ـ الحث المغناطيسي بين الصفيحتين كتابع للمسافة في المحور المركزي الذي يوصل بينهما.

جـ ـ علاقة التغير الحيزي للمجال المغناطيسي مع التغير الزماني للمجال الكهربي.

الحل

مجموع تيار الإزاحة يعطى من المعادلة:

$$I_d = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

لحساب المجال المغناطيسي بين الصفيحتين نستعمل المعادلة (٥-٩) مع اعتبار $J_c = 0$ وكذلك اعتبار نصف قطر المسار المغلق r الذي يحسب عنده المجال:

$$\therefore \oint_c B.dl = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{dE}{dt} dS = \mu_0 I'_d$$

$$\therefore 2\pi r B = \mu_0 I'_d$$

حيث I'_d هو مقدار تيار الإزاحة المار خلال المسار المغلق الذي نصف قطره r والعلاقة التي تربط بين I'_d و I_d هي:

$$I'_d = I_d \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \frac{r^2}{r_0^2}\left(-\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \qquad (١)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r^2}{r_0^2}\left(-\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \qquad (٢)$$

وتدل المعادلة السالبة على اتجاه B كما في الشكل (٣أ ـ ٩).

إذا فرض أن المجال الكهربي يتجه مع محور Z فإن تيار الإزاحة يمكن التعبير عنه بالمعادلة (٢ـ٩) حيث:

$$I'_d = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (٣)$$

وبمقارنة المعادلتين (١) و(٣) يُحصل على:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \pi r_0^2}\left(-\frac{q}{RC}\right) e^{-t/RC} \qquad (٤)$$

ويمكن الحصول على علامة التغير الحيزي للقيمة B باشتقاقه بالنسبة لـ r وباستعمال المركبات الديكارتية للحث المغناطيسي. فالشكل (٣ب ـ ٩) يوضح اتجاه E وكذلك B فإذا نقصت E فإن اتجاه B يكون معاكسا لحركة عقرب الساعة.

وتصبح قيمة B الواردة في المعادلة (٢) كالتالي:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{r_0^2}\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \qquad (٥)$$

أما مركبات B فهي:

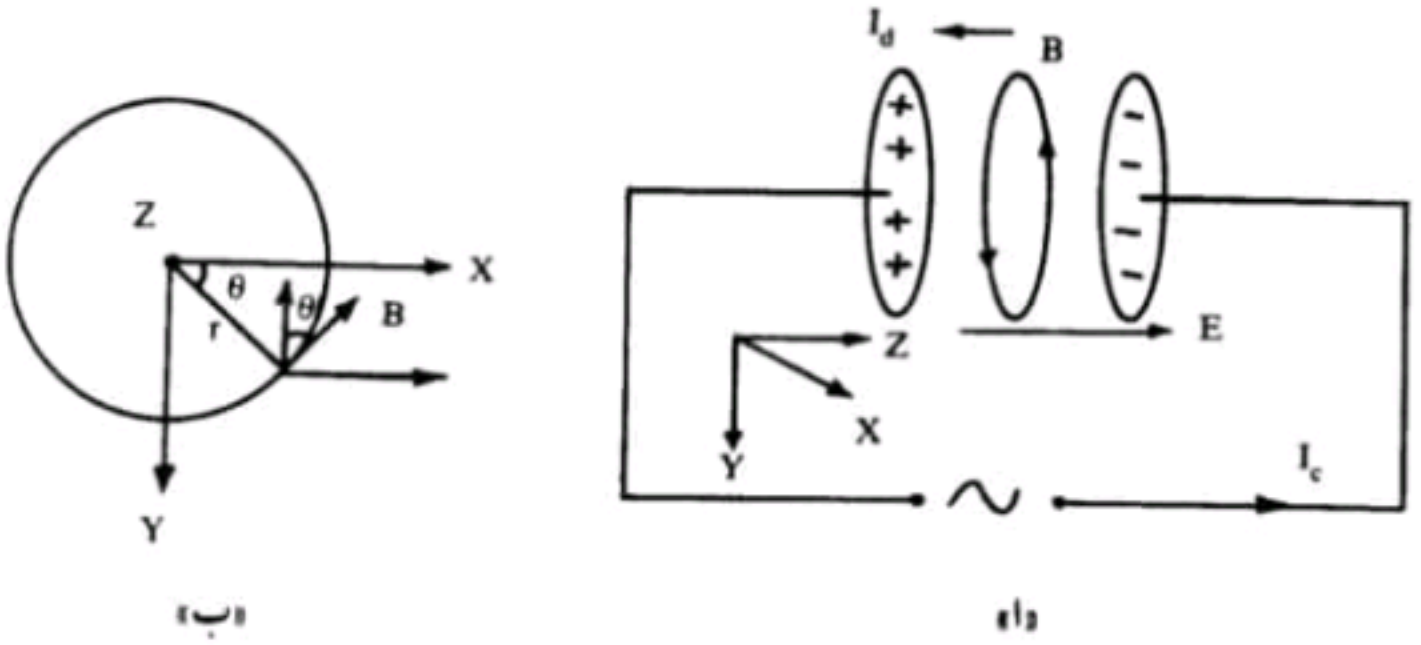
$$B_x = B\sin\theta = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{r_0^2}\frac{q}{RC} e^{-t/RC}\right]\frac{y}{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi r_0^2}\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \qquad (٦)$$

$$B_y = -B\cos\theta = -\frac{\mu_0 x}{2\pi r_0^2}\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \qquad (٧)$$

من المعادلات (٤) و(٦) و(٧) يحصل على:

$$B_x = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} y \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad , \quad B_y = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} x \frac{\partial E_z}{\partial t}$$



شكل (٣-٩): تابع للمثال (١-٩) ويوضح المجال المغناطيسي الذي حثه B والذي نتج عن تغير المجال الكهربي بين صفيحتي المكثف الدائري.

وحيث إن E_z وكذلك $\partial E_z/\partial t$ ليست تابعة للمكان فإن :

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (٨)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (٩)$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = -\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (١٠)$$

وهذه النتيجة تبين أنه عند أي نقطة في الفراغ إذا تغير المجال الكهربي مع الزمن فإن تغيرا حيزيا يحدث للمجال المغناطيسي عند تلك النقطة.

(٩-٣) معادلات ماكسويل
Maxwell's Equations

(٩-٣-١) معادلات ماكسويل في شكلها العام

لقد أشير إلى معادلات ماكسويل في أماكن مختلفة في هذا الكتاب وستظهر مجتمعة في هذا البند. تتألف معادلات ماكسويل من أربع معادلات رياضية مشتقة من

قانون أمبير الدوائري وقانون فاراداي وقانون جاوس. هذه المعادلات مهمة وتمثل القواعد الأساسية لتحليل معظم مسائل الكهرومغناطيسية.

١ ـ *المعادلات التكاملية*:

هي عبارة عن المعادلات (١٤٤ـ ٣)، (١٥ـ٥)، (١٥ـ٦) و(٧ـ٩) التي وردت في البنود (٣ـ١١)، (٥ـ٣)، (٦ـ٣ـ١) و(٩ـ٢) على الترتيب. وهذه المعادلات هي:

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{ـ}١٠)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل التكاملية للمجال الكهربي المشتقة من قانون جاوس.

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{ـ}١١)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية للمجال المغناطيسي المشتقة من قانون جاوس.

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{ـ}١٢)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية المشتقة من قانون فاراداي.

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{ـ}١٣)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية المشتقة من قانون أمبير الدوائري.

٢ ـ *المعادلات التفاضلية*

وهي تمثل الصيغ التفاضلية للمعادلات السابقة الذكر. وهي عبارة عن المعادلات (٤٤ب ـ ٣)، (١٤ـ٥)، (٢٠ـ٦) و(٨ـ٩) التي وردت في البنود (٣ـ١١) و(٥ـ٣) و(٦ـ٣ـ٢) و(٩ـ٢) على الترتيب. وهذه المعادلات هي:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩\text{ـ}١٤)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-١٥)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-١٦)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-١٧)$$

٣ ـ معادلات مكملة (إضافية)

تحتاج معادلات ماكسويل إلى معادلات أخرى (وردت في الكتاب) تعتبر مهمة لحل مشكلات الكهرومغناطيسية منها:

● المعادلة (٧-٤) وهي:

$$J = \sigma E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-١٨)$$

● معادلة الاستمرارية (٦-٤) وهي:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-١٩)$$

● معادلات القوى (١٣-١)، (١٠٢-٥) و (٧٦-٥) وهي:

$$F = qE \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٠)$$

$$F = qE + qv \times B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢١)$$

$$dF = (I \times B) \cdot dl \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٢)$$

● المعادلة (٤٨-٣) التي تربط بين المجال الكهربي E والإزاحة D وكذلك المعادلة (٨-٧) التي تربط بين الحث المغناطيسي B والمجال المغناطيسي H.

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E + P \quad \ldots\ldots \quad (٩-٢٣)$$

$$B = \mu H = \mu_0 (H + M) \quad \ldots\ldots \quad (٩-٢٤)$$

(٩-٣-٢) معادلات ماكسويل في حالات خاصة

Maxwell's equation in special cases

ا ـ معادلات ماكسويل في الحيز الفارغ Free space

وردت معادلات ماكسويل في البند السابق في شكلها العام، أما بالنسبة لقيمها في الحيز الفارغ، أي عندما تكون كثافة التيار J وكثافة الشحنة الحجمية ϱ تساوي الصفر فإن معادلات ماكسويل تصبح كالتالي:

١ ـ المعادلات التكاملية

$$\oint_S D \cdot dS = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٥)$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٦)$$

$$\oint_c E \cdot dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٧)$$

$$\oint H \cdot dl = \int \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٨)$$

٢ ـ المعادلات التفاضلية

$$\nabla \cdot D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٢٩)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٣٠)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٣١)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩-٣٢)$$

ب ـ معادلات ماكسويل والزمن Maxwell's equation and the time

إذا كانت المجالات الكهربية والمغناطيسية لا تتغير مع الزمن فإن معادلات ماكسويل تؤول إلى المعادلات الاستاتيكية (الساكنة) للكهرباء والكهرومغناطيسية التي سبق دراستها في الفصول السابقة. هذه المعادلات هي:

١ ـ المعادلات التكاملية

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \varrho\, dV \quad , \quad \oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \quad , \quad \oint_c \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad (٩-٣٣)$$

٢ ـ المعادلات التفاضلية

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = \varrho$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{و} \quad \nabla\times\mathbf{E} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (٩-٣٤)$$

أما إذا كان التغير بطيئا جدا فيمكن إهمال تيار الازاحة وتعرف هذه الحالة باسم شبه الاستاتيكية (quasi-static) والمعادلات تشبه المعادلات السابقة ما عدا المعادلة الرابعة فإنه يستبدل بها قانون فاراداي أي أن:

$$\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \quad \ldots\ldots \quad (٩-٣٥أ)$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad (٩-٣٥ب)$$

أما إذا كان التغير كبيرا مع الزمن (عندما يزيد التردد على 100 كيلوهيرتز) فإنه لابد من الأخذ بعين الاعتبار تيار الإزاحة وهذا يعطي حلا لمعادلات ماكسويل بالنسبة للإشعاعات الكهرومغناطيسية.

وأبسط مثال لتكوين الأمواج الكهرومغناطيسية المنبعثة من المصادر المختلفة هو حدوث الوميض (spark) الحادث بين كرتين مشحونتين. فالتيار العالي التردد، ذو الزمن القصير يولد مجالا مغناطيسيا مترددا ينتج عنه مجال كهربي متردد قرب الكرتين. ولكن هذا المجال الكهربي ينتج عنه تيار يسمى بتيار الإزاحة الذي بدوره ينتج مجالا مغناطيسيا جديدا. وقبل معرفة تيار الإزاحة، الذي أضيف إلى المعادلة (١٧-٩)، يمكن الاعتقاد بأن المجال الكهربي والمجال المغناطيسي يؤولان إلى الصفر.

ويتكرار هذه العملية بصورة مستمرة تتكون الأمواج الكهرومغناطيسية من مجال كهربي متردد ومجال مغناطيسي متردد أيضا ينتشران في الفراغ بعيدا عن الكرتين بسرعة، يمكن تحديد قيمتها من المعادلتين (١٤-٩) و(١٧-٩)، في اتجاه متعامد على كل منهما.

وأول مكتشف للإشعاع الكهرمغناطيسي الناتج عن الكرتين المشحونتين هو هيرتز (١٨٨٧م) وذلك بمحاثة مجال كهربي في دائرة كهربية تبعد مسافة معينة عن الكرتين ووجد أن سرعة هذه الموجات تساوي 3×10^8 متر/ثانية ولها خواص الضوء المرئي مثل الانعكاس والانكسار والاستقطاب.

مثال (٢-٩)

إذا فرض أن المجالات الكهربية والمغناطيسية تتغير توافقيا مع الزمن. ما هي صيغ معادلات ماكسويل إذا كان:

$$D = D_0 e^{j\omega t}$$

الحل

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i\omega D_0 e^{i\omega t} = i\omega D$$

وتكون بذلك معادلات ماكسويل هي:

$$\oint H.dl = (\sigma + j\omega\varepsilon \int E.dS \quad \text{أو} \quad \nabla \times H = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, E$$

$$\oint E.dl = -j\omega\mu \int_S H.dS \quad \text{أو} \quad \nabla \times E = -j\omega\mu)\, H$$

$$\oint_S D.dS = \int_V \varrho.dV \quad \text{أو} \quad \nabla . D = \varrho$$

$$\oint_S B.dS = 0 \quad \text{أو} \quad \nabla . B = 0$$