كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثامنة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تقاطع مستقيم مع مستو :

لتكن لدينا معادلات الوسيطية للمستقيم D :

$$D: \quad x = x_0 + \lambda\alpha \quad , \quad y = y_0 + \lambda\beta \quad , \quad z = z_0 + \lambda\gamma$$

موجه توجيه $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$

عندئذٍ لإيجاد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوى :

$$P = ax + by + cz + d = 0$$

الذي ناظمه $\vec{w}(a, b, c)$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوى فنحصل على

$$a(x_0 + \lambda\alpha) + b(y_0 + \lambda\beta) + c(z_0 + \lambda\gamma) + d = 0$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d + \lambda(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0 \qquad (1)$$

معادلة بمجهول واحد هو λ . نناقش الحالات التالية :

1) إذا كان $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ فللمعادلة حل وحيد أي للوسيط λ قيمة وحيدة نعوض هذه القيمة في المعادلات الوسيطية فنحصل على نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي .

2) إذا كان $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ لدينا حالتين :

a) إما أن يكون $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ وبالتالي المعادلة (1) محققة مهما كانت قيمة λ (أي يوجد عدد لانهائي من الحلول) أي يوجد عدد لانهائي من نقاط التقاطع وفي هذه الحالة يكون المستقيم واقعاً في المستوي

b) إذا كان $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$ وتكون المعادلة (1) مستحيلة الحل أي لا توجد نقاط تقاطع فإن المستقيم يوازي المستوي .

ملاحظة :

إذا كان المستقيم معطى كتقاطع مستويين :

$$D: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

فنحصل في هذه الحالة على ثلاثة مستويات (ثلاثة معادلات) نقوم بالحل المشترك لهذه المعادلات . ونميز الحالات التالية :

1) إذا كان $\Delta \neq 0$ (محدد الأمثال) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$

- نوجد نقطة التقاطع بحساب Δx ، Δy ، Δz (محدد الأمثال بعد تبديل كل عمود بأمثال الحد الثابت مكان الأمثال x ، y ، z على الترتيب).

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -d_1 & b_1 & c_1 \\ -d_2 & b_2 & c_2 \\ -d & b & c \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & -d_1 & c_1 \\ a_2 & -d_2 & c_2 \\ a_1 & -d & c \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & -d_2 \\ a & b_2 & -d \end{vmatrix}$$

عندها تكون إحداثيات نقطة التقاطع :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

2) أما إذا كان $\Delta = 0$ أي أن مواظم المستويات واقعة في سطر واحد عندها تكون الحالات التالية :

1. للمعادلات الثلاث عدد لانهائي من الحلول (المستقيم يقع في المستوي) وهذا يتم إذا كانت المستويات الثلاثة مشتركة بفصل مشترك واحد . ($\Delta z = 0 , \Delta y = 0 , \Delta x = 0$)
2. ليس للمعادلات الثلاث حل وبالتالي المستويات لا تتقاطع معاً بأية نقطة وتكون المستقيم D موازي للمستوى ($\Delta z \neq 0 , \Delta y \neq 0 , \Delta x \neq 0$)

تمرين :

ادرس وضع المستقيم $\chi = 2-3\lambda$ ، $y = 1+\lambda$ ، $z = \lambda$

بالنسبة للمستويات :

$P_1 = x+y+z+4 = 0$

$P_2 = x+2y+z+5 = 0$

$P_3 = x+4y-z-6 = 0$

الحل :- نعوض معادلات المستقيم في المستوي P_1 نجد :

$(2-3\lambda)+(1+\lambda)+\lambda+4 = 0 \Rightarrow -\lambda+7 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 7}$

وتكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي P_1 هي

$M_1(-19, 8, 7)$

- نعوض معادلات المستقيم في المستوي P_2 نجد :

$(2-3\lambda)+2(1+\lambda)+\lambda+5 = 0 \Rightarrow 0\lambda+9 = 0$

وهذه المعادلة مستحيلة الحل والمستقيم يوازي المستوي P_2 .

- نعوض معادلات المستقيم في المستوي P_3 نجد

$(2-3\lambda)+4(1+\lambda)-\lambda-6 = 0 \Rightarrow 0\cdot\lambda+0 = 0$

وهذه المعادلة محققة مهما تكن λ والمستقيم واقع في المستوي P_3 (يوجد عدد لانهائي من النقاط التي تحقق هذه المعادلة).

تمرين : ادرس تقاطع المستقيم $D : \begin{cases} x+y+2z-3 = 0 \\ x-2y+5z = 0 \end{cases}$

مع كل من المستويات السابقة P_1 ، P_2 ، P_3 في التمرين السابق

الحل : التقاطع مع P_1 ، نحل المعادلات الثلاث :

$x+y+2z-3 = 0$

$x-2y+5z = 0$

$x+y+z+4 = 0$

نوجد محدد المثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7+4+6 = 3 \neq 0$$

ثم نوجد المحددات Δ_x ، Δ_y ، Δ_z

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -57 \Rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = -19$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 24 \Rightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 8$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 21 \Rightarrow \beta = \frac{\Delta \beta}{\Delta} = 7$$

• وأيضاً ندرس تقاطع D مع P_2 :

نحسب حين $\Delta = 0$ وأيضاً $\Delta_\beta \neq 0$ ، $\Delta_y \neq 0$ ، $\Delta_x \neq 0$ والحل سيحلي الحل ولا يوجد نقاط تقاطع .

• أما بالنسبة للمستوي الثالث P_3 فنجد : $\Delta = 0$ ، $\Delta_x = 0$ ، $\Delta_y = 0$ ، $\Delta_\beta = 0$

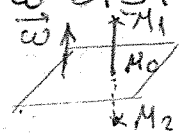
والحل عدد لانهائي من الحلول تتوضع على الفصل المشترك للمستويات الثلاثة .

التناظر بالنسبة لمستو :

نقول عن النقطتين $M_1(x_1, y_1, \beta_1)$ و $M_2(x_2, y_2, \beta_2)$ أنهما متناظرتان بالنسبة للمستوي P

$P = ax + by + c\beta + d = 0$ ، $\vec{\omega}(a, b, c)$

إذا كان المستوي P يناصف القطعة المستقيمة M_1M_2 في M_0 أي أن $\vec{M_1M_2} // \vec{\omega}$ أي :



$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{c} \quad (1)$$

والنقطة M_0 تقع في المستوي أي أن إحداثياتها تحقق معادلته :

$$a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + c\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{c}\right) + d = 0 \quad (2)$$

المعادلات الثلاث تسمح لنا بحساب إحداثيات النقطة M_2 المطلوبة .

تمرين : أوجد نظيرة النقطة $M_1(1, 2, -4)$ بالنسبة للمستوي $P = x + y + \beta + 1 = 0$

الحل : بفرض أن $M_2(x_2, y_2, \beta_2)$ نظيرة النقطة M_1 بالنسبة لـ P أي أن $\vec{\omega} // \vec{M_1M_2} \in$

$$\frac{x_2 - 1}{1} = \frac{y_2 - 2}{1} = \frac{\beta_2 + 4}{1} \xrightarrow{\text{نضع الوسيط}} \boxed{x_2 = 1 + \lambda \ , \ y_2 = 2 + \lambda \ , \ \beta_2 = -4 + \lambda} \quad (1)$$

نقطة تقاطع $\vec{M_2M_1}$ مع المستوي هي M_0 وهذه النقطة تحقق معادلة المستوي $M_0\left(\frac{1+x_2}{2}, \frac{2+y_2}{2}, \frac{-4+\beta_2}{2}\right)$

$$\frac{1 + x_2}{2} + \frac{2 + y_2}{2} + \frac{-4 + \beta_2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 + y_2 + \beta_2 + 1 = 0} \quad (2)$$

نعوض (1) في (2) ونحصل على معادلة في λ مجهول نحسبه $\lambda = 0$ وبالتالي نعوض في (1) نحصل على

$x_2 = 1, \ y_2 = 2, \ \beta_2 = -4$

مكتبة A to Z