كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول) أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم للسطح S.

$$F(x,y,z) = x^3 + 2xy + z^3 - 2 = 0$$

في النقطة $M_0(1,0,1)$

معادلة المستوي المماس في النقطة:

$$f_{x_0}(x-x_0) + f_{y_0}(y-y_0) + f_{z_0}(z-z_0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 2y \\ f_y &= 2x \\ f_z &= 3z^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{عند } M_0(1,0,1) \quad \left\{\begin{aligned} f_{x_0} &= 3(1)^2 + 2(0) = 3 \\ f_{y_0} &= 2 \\ f_{z_0} &= 3 \end{aligned}\right.$$

$$\vec{n} \ (3,2,3)$$

معادلة المستوي المماس:

$$3(x-1) + 2(y-0) + 3(z-1) = 0$$

$$3x + 2y + 3z - 6 = 0$$

معادلة المستقيم الناظم:

$$\frac{x-1}{3} + \frac{y-0}{2} + \frac{z-1}{3}$$

السؤال الثاني) أوجد معادلتي المستقيم الناظم والمستوي المماس للسطح التالي:

$$x = \lambda \sin\varphi \quad , \quad y = \lambda \cos\varphi \quad , \quad z = \lambda$$

عند النقطة المناظرة $\lambda = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$

الحل) أولاً نوجد M_0

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sin\tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ y &= 2\cos\tfrac{\pi}{3} = 1 \\ z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad M_0\left(\sqrt{3}, 1, 2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x'_\lambda &= \sin\varphi \\ y'_\lambda &= \cos\varphi \\ z'_\lambda &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \vec{M}_{T_1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= \lambda\cos\varphi \\ y'_\varphi &= -\lambda\sin\varphi \\ z'_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{M}_{T_2}\left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$$

$$\vec{N} = \vec{M}_{T_1} \wedge \vec{M}_{T_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{N} \quad (\sqrt{3}, 1, -2)$$

معادلة المستوي المماس

$$\sqrt{3}\,x + y - 2z = 0$$

معادلة المستقيم الناظم

$$\frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

السؤال الثالث) لدينا المحل الهندسي المعادلة:

$$C \begin{cases} f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ g(x,y,z) = x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

أوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم لهذا المنحنى في النقطة $M_0(-1,0,1)$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = -4 \\ f'_y = 2y \\ f'_z = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow M_0(-1,0,1) \left\{\begin{array}{l} f'_{x_0} = -4 \\ f'_{y_0} = 0 \\ f'_{z_0} = 2 \end{array}\right. \quad (-4,0,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} g'_x = 1 \\ g'_y = 0 \\ g'_z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{عند } M_0 \left\{\begin{array}{l} g'_{x_0} = 1 \\ g'_{y_0} = 0 \\ g'_{z_0} = 1 \end{array}\right. \quad (1,0,1)$$

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6j \qquad \vec{T}:(0,6,0)$$

معادلة المستقيم المماس

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{0}$$

المستوي الناظم

$$6y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

وهي معادلة المستوي xOz

وظيفة

$$C:\begin{cases} f(x,y,z) = x^3 - 2yz + y + z - 2 = 0 \\ g(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2 = 0 \end{cases}$$

$M(1,0,1)$

أكتب معادلة المستقيم المماس والمستوى الناظمي للمنحنى C

أكتب معادلة المستقيم المماس والمستوى الناظمي

السؤال الرابع) $x = 2e^t \quad y = te^{t-1}, \quad z = e^{t^2}$

في النقطة M الموافقة لـ $t = 1$

الحل) نوجد إحداثيات M

$x_0 = 2e \quad , y_0 = 1, \quad z_0 = e$

$M_0(2e, 1, e)$

$x'_t = 2e^t \Rightarrow x'_0 = 2e$

$y'_t = e^{t-1} + te^{t-1} \Rightarrow y'_0 = 2$ $\quad (2e, 2, 2e)$

$z'_t = 2te^{t^2} \Rightarrow z'_0 = 2e$

معادلة المستقيم المماس

$$\frac{x - 2e}{2e} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - e}{2e}$$

معادلة المستوي الناظمي

$$ex + y + ez - 1 - 3e^2 = 0$$

وظيفة: أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم للسطح

عند النقطة $M_0(2,-1,-1)$

$$S: x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 12zx + 16 = 0$$

وظيفة: $x = -e^t$, $y = te^{t-1}$, $z = e^{t+1}$

أوجد معادلتي المستقيم المماس والمستوي الناظم في النقطة

$$t = 1$$

وظيفة: لتكن لدينا السطح المعطى وسيطياً

$$x = \cos\theta$$
$$y = \lambda \sin\theta$$
$$z = 1 - \lambda$$

$$\lambda = 1 \ , \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

أكتب معادلتي المستقيم المماس والمستوي الناظم.

وظيفة:

$$x = te^{t+1}$$
$$y = 2e^{t+1}$$
$$z = t^3 + 1$$

أوجد معادلتي المستقيم الناظم والمستوي المماس

$$t = -1$$

السؤال الخامس)

$P: 2x+2y+3z+25=0$

$S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-25=0$

هل المستوى P يمس الكرة S ؟

الحل) $S(x,y,z): x^2+y^2+z^2=25$

كرة مركزها $O(0,0,0)$

$R=5$,

نوجد بعد المركز عن المستوى P.

$$L = \frac{|2x_0+2y_0+3z_0+25|}{\sqrt{4+4+9}} = \frac{25}{\sqrt{17}} \neq R=5$$

$\Rightarrow P$ لا يمس الكرة

السؤال السادس) ماذا يمثل المعطى:

$$x^2+4y^2+z^2-4x-8y+8z+28=0$$

ثم أوجد المستوى المناسب لتمثيل المعادلة الأصلية بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة

الحل) نتبع الخطوات كما في السؤال السابق وهذه هي

$x = X+x_0$, $y = Y+y_0$, $z = Z+z_0$

ونوفق بها المعادلة.

المحاضرة العملية السابعة:

السؤال الأول: أوجد قط المستقيم:

$$D:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

على المستوي

$$P: x+2y+3z-6=0$$

أولا نوجد حزمة من المستقيم D:

$$P_\lambda: (1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(1-2\lambda)z-1=0$$

$$\overrightarrow{N_\lambda}=(1+\lambda,\ 1-\lambda,\ 1-2\lambda)$$

$$\overrightarrow{N_P}:(1,2,3)$$

$$\overrightarrow{N_\lambda}\cdot\overrightarrow{N_P}=0$$

$$1+\lambda+2-2\lambda+3-6\lambda=0$$

$$-7\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=\frac{-6}{-7}$$

$$\lambda=\frac{6}{7}$$

نعوض في معادلة الحزمة:

$$P': \left(1+\frac{6}{7}\right)x+\left(1-\frac{6}{7}\right)y+\left(1-\frac{12}{7}\right)z-1=0$$

$$P': \frac{13}{7}x+\frac{1}{7}y-\frac{5}{7}z-1=0$$

نضرب في 7

$$P': 13x+y-5z-7=0$$

معادلة مسقط المستقيم

$$D': \begin{cases} 13x+y-5z-7=0 \\ x+2y+3z-6=0 \end{cases}$$

السؤال الثاني:

وضع المستقيم بالنسبة للكرة:

- نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم في معادلة الكرة فيكون لدينا ثلاث حالات

بعد التعويض نحل بيانيا فإذا كانت

① $\Delta > 0$ ⇐ المستقيم قاطع الكرة بنقطتين

② $\Delta = 0$ ⇐ " مماس " بنقطة واحدة

③ $\Delta < 0$ ⇐ " خارج الكرة

مثال:

$$D:\begin{cases} 2x-y+2z-12=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$$

لدينا كرة

$$S: x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0$$

ادرس الوضع بين D و S ؟

الحل: أولا نوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم D:

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\omega_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=9\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\vec{N}(9,6,-6)$$

$a\ \ b\ \ c$

لإيجاد النقطة:

نفرض $z=0$

$$2x-y-12=0 \quad -①$$

$$2x-4y+6=0 \quad -②$$

بالطرح:

$3y - 18 = 0$

$3y = 18 \Rightarrow y = 6$

نعوض في (1)

$2x - 6 - 12 = 0$

$2x = 18 \Rightarrow x = 9$

$M(\underset{x_0}{9}, \underset{y_0}{6}, \underset{z_0}{0})$

$D: \begin{cases} x = 9 + 9\lambda \\ y = 6 + 6\lambda \\ z = -6\lambda \end{cases}$

نعوض D في S:

بالتعويض نجد:

$S: (9+9\lambda)^2 + (6+6\lambda)^2 + 36\lambda^2 - 18 - 18\lambda + 12 + 12\lambda - 24\lambda - 43 = 0$

$S: 81 + 162\lambda + 81\lambda^2 + 36 + 72\lambda + 36\lambda^2 + 36\lambda^2 - 30\lambda - 43 = 0$

$S: 153\lambda^2 + 104\lambda + 68 = 0$

كل المعادلة بـ Δ وتقارن

السؤال الثاني:

$P_1: (\alpha+1)x - \alpha y + z - 1 = 0$

$P_2: 2x + y + 3z - 4 = 0$

① عين α ليكون P_1 يعامد P_2

$\vec{N_1}(\alpha+1, -\alpha, 1)$

$\vec{N_2}(2, 1, 3)$

حتى يكون P_1 عمودي على P_2 يجب أن يكون

$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 0$

$2(\alpha+1) + 1(-\alpha) + 3(1) = 0$

$2\alpha + 2 - \alpha + 3 = 0$

$\alpha = -5$

② هل يمكن تعيين α ليكون $P_1 // P_2$

حتى يكون P_1 و P_2 متوازيان يجب أن يكون $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$ مرتبطان خطيا.

$\frac{\alpha+1}{2} = \frac{-\alpha}{1} = \frac{1}{3}$

③ ② ①

من ① و ②

$-3\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{-1}{3}}$

من ① و ③

$3\alpha + 3 = 2 \Rightarrow 3\alpha = -1$

$\boxed{\alpha = \frac{-1}{3}}$

السؤال الرابع: اكتب معادلة المستوي المار من $M(3,1,5)$ ويعامد المستقيم

$D: \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{5}$

$P \perp D$

$\Rightarrow \vec{N_P} = \vec{v_D}(\underset{a}{4}, \underset{b}{-3}, \underset{c}{5})$

$M(3,1,5)$

$x_0\ y_0\ z_0$

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: 4(x-3)-3(y-1)+5(z-5)=0$

$P: 4x-12-3y+3+5z-25=0$

$P: 4x-3y+5z-34=0$

② أوجد معادلة المستوى P_2 الذي يشمل $M_2(5,0,0)$ ويوازي P

$P_2 // P \Rightarrow \vec{N_2} = \vec{N}\ (4,-3,5)$

$M\ (5,0,0)$

$P_2: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P_2: 4(x-5)-3(y-0)+5(z-0)=0$

$P_2: 4x-3y+5z-20=0$