كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة :الثانية /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الثانية (تبولوجيا _عملي)

تمارين (2)

إعداد: أ. نوره العسلي

التمرين الأول:

أثبت صحة العلاقات الآتية:

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 2. $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ برهن بمثال عدم صحة الاحتواء المعاكس.

3. $\overline{X \backslash A} = X \backslash A^{\circ}$ 4. $X \backslash \bar{A} = (X \backslash A)^{\circ}$ 5. $bd(A) = \bar{A} \backslash A^{\circ}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$A \subseteq A \cup B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$
$$B \subseteq A \cup B \Longrightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$
$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \quad ....I$$

من جهة ثانية لدينا: $A \subseteq \bar{A} \;\&\; B \subseteq \bar{B}$ بالتالي: $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

إذاً $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$ لأن $\bar{A} \cup \bar{B}$ مجموعة مغلقة

$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \quad ...II$

من علاقتي الاحتواء و الاحتواء المعاكس نجد أن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2. $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

$$A \cap B \subseteq A \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A}$$

$A \cap B \subseteq B \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{B}$ بالتالي: $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

الإحتواء المعاكس غير محقق بالضرورة كما يبين المثال الآتي:

لنأخذ $X = \{a,b,c\}$ و $\tau = \{X,\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$ بالتالي تكون $\mathcal{F} = \{\emptyset,X,\{b,c\},\{c\}\}$ من أجل $A = \{a\}, B = \{c\}$

فإن $A \cap B = \emptyset$ و منه:

$\overline{A \cap B} = \emptyset, \bar{A} = X, \bar{B} = B$

$\bar{A} \cap \bar{B} = X \cap B = B \neq \emptyset = \overline{A \cap B}$

3. $\overline{X\backslash A} = X\backslash A^{\circ}$

أي أن: $A^{\circ} \subseteq A \Rightarrow X\backslash A \subseteq X\backslash A^{\circ} \Rightarrow \overline{X\backslash A} \subseteq \overline{X\backslash A^{\circ}} = X\backslash A^{\circ}$

$\overline{X\backslash A} \subseteq X\backslash A^{\circ}$ من جهة ثانية :

$$X\backslash A \subseteq \overline{X\backslash A} \Rightarrow X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right) \subseteq X\backslash(X\backslash A) = A$$

و منه: $X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right) \subseteq A \Rightarrow \left(X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right)\right)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \Rightarrow X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right) \subseteq A^{\circ}$

و بالتالي $X\backslash A^{\circ} \subseteq \overline{X\backslash A}$ من علاقتي الاحتواء و الاحتواء المعاكس نجد أن:

$\overline{X\backslash A} = X\backslash A^{\circ}$

4. $(X\backslash A)^{\circ} = X\backslash \bar{A}$

أي أن: $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow X\backslash\bar{A} \subseteq X\backslash A \Rightarrow (X\backslash\bar{A})^{\circ} \subseteq (X\backslash A)^{\circ}$

$X\backslash\bar{A} \subseteq (X\backslash A)^{\circ}$

من جهة ثانية :

$$(X\backslash A)^{\circ} \subseteq X\backslash A \Rightarrow A \subseteq X\backslash(X\backslash A)^{\circ}$$

$\bar{A} \subseteq \overline{X\backslash(X\backslash A)^{\circ}}$ و منه $\bar{A} \subseteq X\backslash(X\backslash A)^{\circ}$ و منه: $(X\backslash A)^{\circ} \subseteq X\backslash \bar{A}$ من علاقتي الاحتواء

و الاحتواء المعاكس نجد أن: $(X\backslash A)^{\circ} = X\backslash \bar{A}$

5. $bd(A) = \bar{A}\backslash A^{\circ}$

$$bd(A) = \bar{A} \cap \overline{X\backslash A} = \bar{A} \cap \left(X\backslash A^{\circ}\right) = \bar{A}\backslash A^{\circ}$$

<u>التمرين الثاني:</u>

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و لنعرف عليها تبولوجيا المتممات المنتهية τ_{cof}، لنأخذ المجموعات الآتية: $A = \{1,7,12\}$ ، $B = [6,24]$ والمطلوب إيجاد: $A^{\circ},\bar{A}.\acute{A},B^{\circ},\bar{B},\acute{B}$

في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ لدينا: $\tau_{cof} = \{T \in P(\mathbb{R}): \mathbb{R}\backslash T \text{ مجموعة منتهية}\} \cup \{\emptyset\}$

و فيه تكون جميع عناصر τ_{cof} مجموعات غير منتهية باستثناء المجموعة $\emptyset$

المجموعة A مجموعة منتهية فالمجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة فيها هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و عليه تكون $A^{\circ} = \emptyset$.

لإيجاد B°: نفرض جدلاً وجود مجموعة مفتوحة غير خالية محتواة في B أي $T \subseteq B$ عندئذٍ يكون: $\mathbb{R}\backslash B \subseteq \mathbb{R}\backslash T$ لكن $\mathbb{R}\backslash T$ مجموعة منتهية حسب تعريف الأسرة τ_{cof} و المجموعة $\mathbb{R}\backslash B$ مجموعة غير منتهية، أي لدينا مجموعة غير منتهية محتواة في مجموعة منتهية و هذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ، فالصحيح هو أن المجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في B هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و عليه تكون $B^{\circ} = \emptyset$

إيجاد $\bar{A}$, $\bar{B}$:
إن أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء هي:
$\mathcal{F} = \{F \in P(\mathbb{R}): F \text{ مجموعة منتهية}\} \cup \{\mathbb{R}\}$
نلاحظ أن A مجموعة منتهية فهي مغلقة و بالتالي $\bar{A} = A$، بالنسبة للمجموعة B:
نلاحظ أن جميع عناصر الأسرة $\mathcal{F}$ باستثناء المجموعة $\mathbb{R}$ هي مجموعات منتهية و بما أن B مجموعة غير منتهية فإن المجموعة المغلقة الوحيدة التي تحويها هي $\mathbb{R}$ فهي أصغر مجموعة مغلقة تحوي B بالتالي: $\bar{B} = \mathbb{R}$.
إيجاد $\acute{B}$ و $\acute{A}$:
نعلم أن $\acute{A} \subseteq \bar{A}$ و وجدنا أن $\bar{A} = A$ بالتالي $\acute{A} \subseteq A$ لذا يكفي أن ندرس نقاط المجموعة A
من أجل النقطة $1 \in A$: نأخذ المجموعة $V_1 = \mathbb{R}\backslash\{7,12\}$ متممتها المجموعة $\{7,12\}$ و هي مجموعة منتهية و هذا يعني أن $V_1 \in \tau_{cof}$ و لكونها مجموعة مفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فهي مجاورة لكل نقطة من نقاطها أي أن $V_1 \in V(1)$، لدينا:

$V_1 \cap A = \mathbb{R}\backslash\{7,12\} \cap \{1,7,12\} = \{1\}$ و بحسب تعريف نقطة التراكم فإن $1 \notin \acute{A}$
من أجل النقطة 7 نأخذ المجموعة $V_7 = \mathbb{R}\backslash\{1,12\}$ و بمناقشة مماثلة نجد $7 \notin \acute{A}$

و من أجل 12 نأخذ المجموعة $V_7 = \mathbb{R}\backslash\{1,7\}$ و بمناقشة مماثلة نجد $12 \notin \acute{A}$

أي أن أياً من نقاط المجموعة A ليست نقطة تراكم لها و كون $\acute{A} \subseteq A$، نستنتج أن: $\acute{A} = \emptyset$.

إيجاد $\acute{B}$: وجدنا أن $\bar{B} = \mathbb{R}$ و نعلم أن $\bar{B} = B \cup \acute{B}$ بالتالي $B \cup \acute{B} = \mathbb{R}$ هذه العلاقة تعني أن جميع نقاط $\mathbb{R}\backslash B$ هي نقاط تراكم للمجموعة B أي أن $\mathbb{R}\backslash B \subseteq \acute{B}$،
لندرس نقاط المجموعة B: لتكن x نقطة كيفية من المجموعة B و لنفرض جدلاً أن $x \notin \acute{B}$ هذا يعني وجود مجاورة
$V \in V(x)$ بحيث أن $V \cap B = \emptyset$ أو $V \cap B = \{x\}$ أو $(V\backslash\{x\}) \cap B = \emptyset$، و بحسب تعريف المجاورة توجد مجموعة مفتوحة T بحيث أن: $x \in T \subseteq V$ و منه:
$(T\backslash\{x\}) \cap B \subseteq (V\backslash\{x\}) \cap B = \emptyset$ بالتالي:
$(T\backslash\{x\}) \cap B \subseteq \emptyset$ إذاً $(T\backslash\{x\}) \cap B = \emptyset$
و هذه العلاقة تعني أن $B \subseteq \mathbb{R}\backslash(T\backslash\{x\})$ و هذا تناقض لأن B مجموعة غير منتهية بينما $\mathbb{R}\backslash T$ مجموعة منتهية سبب التناقض الفرض الجدلي الخاطئ بأن $x \notin \acute{B}$
فالصحيح أن:

$x \in \acute{B}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x من المجموعة B نجد أن $B \subseteq \acute{B}$ مما سبق نجد أن

$B \cup (\mathbb{R}\backslash B) \subseteq \acute{B}$ أي أن $\mathbb{R} \subseteq \acute{B}$ و هذا يكافئ القول أن $\acute{B} = \mathbb{R}$.

التمرين الثالث:

لنعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ التبولوجيا:
$\tau = \{T \in P(\mathbb{Z}): \{-9,-3,0,1,12\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ و لنأخذ $X = \{-100,-99,\dots\dots 5\}$ و $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية و
المطلوب :

1. عين τ_X و $\mathcal{F}_X$ و $\tau_{\mathbb{N}}$ و $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$
2. إذا كانت $B = \{1,2,3,\dots\dots,99\}$, $A = \{-9,-8,-7,\dots,0\}$ حدد نوع المجموعة A في (X,τ_X) و نوع B في $(\mathbb{N},\tau_{\mathbb{N}})$.

1. لتكن $T_X \in \tau_X$ مجوعة كيفية عندئذٍ حسب تعريف الفضاء التبولوجي الجزئي: توجد مجموعة مفتوحة $T \in \tau$ بحيث $T_X = T \cap X$ و بما أن $T \in \tau$ فإن $\{-9,-3,0,1,12\} \subseteq T$ و منه: $\{-9,-3,0,1,12\} \cap X \subseteq T \cap X$ أي أن $\{-9,-3,0,1\} \subseteq T \cap X = T_X$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة T_X من τ_X نجد:
$\tau_X = \{T_X \in P(X): \{-9,-3,0,1\} \subseteq T_X\} \cup \{\emptyset\}$ و بالتالي:
$\mathcal{F}_X = \{F_X \in P(X): \{-9,-3,0,1\} \cap F_X = \emptyset\} \cup \{X\}$
. لتكن $T_{\mathbb{N}} \in \tau_{\mathbb{N}}$ مجوعة كيفية عندئذٍ حسب تعريف الفضاء التبولوجي الجزئي: توجد مجموعة مفتوحة $T \in \tau$ بحيث $T_{\mathbb{N}} = T \cap \mathbb{N}$ و بما أن $T \in \tau$ فإن $\{-9,-3,0,1,12\} \subseteq T$ و منه: $\{-9,-3,0,1,12\} \cap \mathbb{N} \subseteq T \cap \mathbb{N}$ أي أن $\{1,12\} \subseteq T \cap \mathbb{N} = T_{\mathbb{N}}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $T_{\mathbb{N}}$ من $\tau_{\mathbb{N}}$ نجد أن:
$\tau_{\mathbb{N}} = \{T_{\mathbb{N}} \in P(\mathbb{N}): \{1,12\} \subseteq T_{\mathbb{N}}\} \cup \{\emptyset\}$ و بالتالي:
$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{F_{\mathbb{N}} \in P(\mathbb{N}): \{1,12\} \cap F_{\mathbb{N}} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$
.2. بما أن $1 \notin A$ فإن $A \notin \tau_X$ فالمجموعة A ليست مجموعة مفتوحة في الفضاء (X,τ_X)
و لدينا $\{-9,-3,0,1\} \cap A = \{-9,-3,0\} \neq \emptyset$ و $A \neq X$ بالتالي $A \notin \mathcal{F}_X$ فهي ليست مغلقة في هذا الفضاء.
بما أن $\{1,12\} \subseteq B$ فإن $B \in \tau_{\mathbb{N}}$ فهي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{N},\tau_{\mathbb{N}})$ و كون $\{1,12\} \cap B = \{1,12\} \neq \emptyset$ فإن $B \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ و $B \neq \mathbb{N}$ بالتالي $B \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ فهي ليست مغلقة في هذا الفضاء

التمرين الرابع:

ليكن $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ الفضاء الحقيقي العادي، و لنأخذ فيه المجموعات:
$Y =]-9,12[, A = \{0,3,7\}, B =]-9,12], C = [-5,7], D =]-3,4[$
حدد نوع كل من المجموعات A,B,C,D في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) و أوجد $\bar{D}_Y$.

بما أن المجموعة $Y =]-9,12[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ كونها مجال مفتوح فإن الشرط اللازم و الكافي لتكون أي مجموعة جزئية من Y هي مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y,τ_Y) هو أن تكون مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$.
المجموعة $A = \{0,3,7\}$:
بما أن $A = \{0,3,7\}$ ليست مجال مفتوح في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ فهي ليست مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ و بالتالي لا يمكن أن تكون مجموعة مفتوحة في (Y,τ_Y).
بملاحظة أن :
$\mathbb{R}\backslash A =]-\infty,0[\cup]0,3[\cup]3,7[\cup]7,+\infty[$ و هي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ لأنها اجتماع لمجالات مفتوحة فيه، فإن المتممة و هي المجموعة $A = \{0,3,7\}$ تكون مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ ، و من جهة ثانية إن: $Y \cap A = A$ أي أنه وجدت مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ هي

$F = A$ بحيث يكون $Y \cap F = A$ أي أن A مجموعة مغلقة في (Y,τ_Y) .

المجموعة B:
بما أن $]-9,12] \not\subseteq]-9,12[$ المجموعة ليست من نقاط الفضاء إذاً لا تدرس.
المجموعة C:
بما أن $C = [-5,7]$ ليست مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ فهي لا يمكن أن تكون مجموعة مفتوحة في (Y,τ_Y).
المجموعة $C = [-5,7]$ مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ و تحقق $Y \cap C = C$ أي أنه وجدت مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ هي $F = C$ بحيث يكون $Y \cap F = C$ أي أن C مجموعة مغلقة في (Y,τ_Y) .
المجموعة D:
بما أن $D =]-3,4[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ كونها مجال مفتوح و $Y =]-9,12[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ ، فهي مجموعة مفتوحة في (Y,τ_Y).
$\bar{D}_Y = \bar{D}_{\mathbb{R}} \cap Y = [-3,4] \cap]-9,12[= [-3,4] \neq D$ بما أن لصاقة المجموعة D لا تساويها في الفضاء (Y,τ_Y) فلا يمكن أن تكون مغلقة فيه.