كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الثالثة /**عملي**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

3- حل غير ممكن

تظهر هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة خالية. ويدل ذلك على وجود تعارض بين القيود أو عدم الالتزام بالوفاء بجميع القيود في وقت واحد.

مثال (2-8):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية التالية:

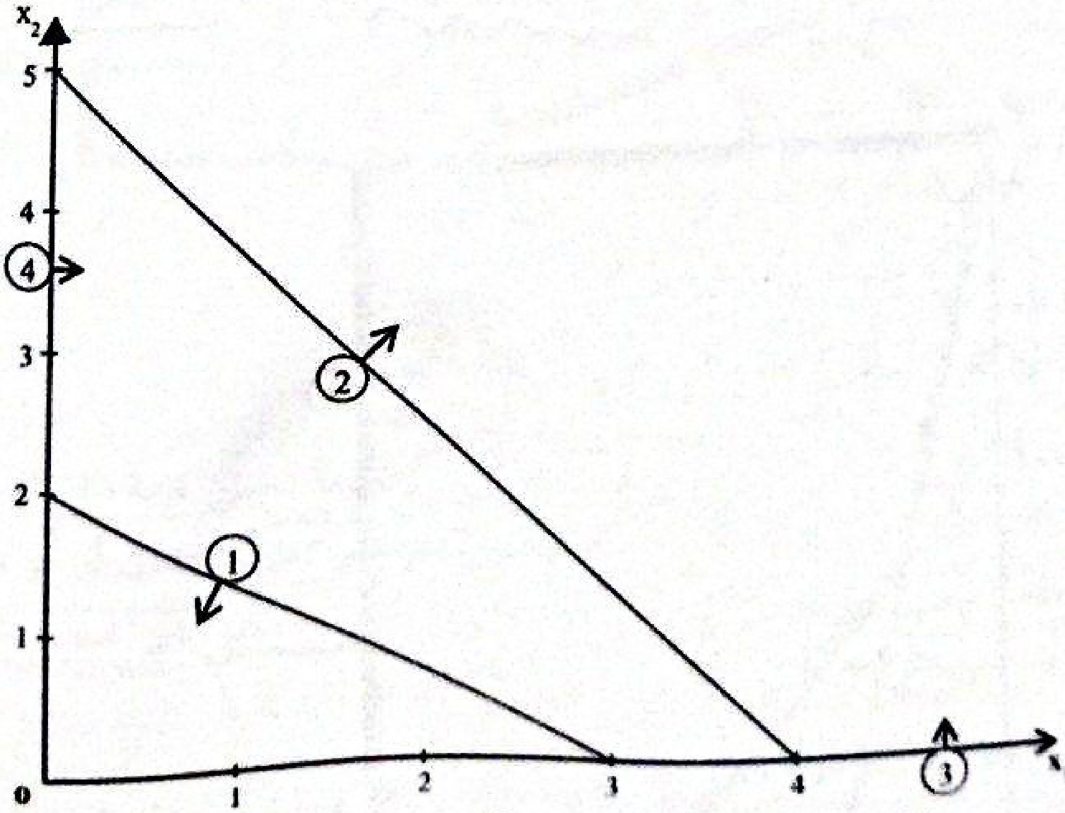
$$\max \; Z = 2x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 & \le & 6 & (1) \\ 5x_1 + 4x_2 & \ge & 20 & (2) \\ x_1 & \ge & 0 & (3) \\ x_2 & \ge & 0 & (4) \end{array}$$

الحل:

منطقة الحلول الممكنة خالية كما هو واضح بالشكل (2-7)، وبالتالي الحل غير ممكن.



الشكل (2-7): حل غير ممكن (منطقة الحلول الممكنة خالية).

س

ج. (1)

وتشير هذه الحالة لعيوب في بناء النموذج، ومن تلك العيوب نذكر الآتي:

- تجاهل قيد مهم ومؤثر.
- لم يتم تقدير معاملات القيود بشكل صحيح.

مثال (2-7):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية الآتية:

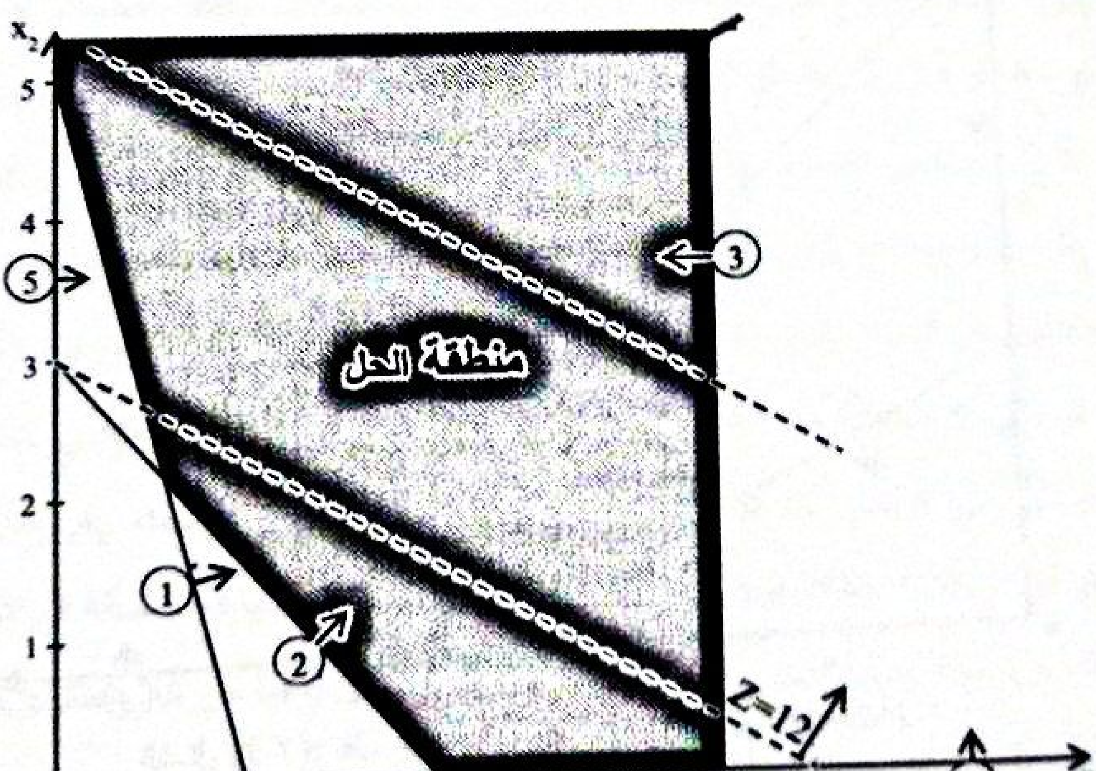
$$\max\ Z = 3x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned}
5x_1 + x_2 &\geq 5 \quad &(1)\\
3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \quad &(2)\\
2x_1 &\leq 7 \quad &(3)\\
x_1 &\geq 0 \quad &(4)\\
x_2 &\geq 0 \quad &(5)
\end{aligned}$$

الحل:

منطقة الحل غير محدودة وذلك باتجاه تزايد دالة الهدف كما هو واضح بالشكل (2-6)، لذلك لدينا حل غير محدود.



الشكل (2-6): حل غير محدود (منطقة الحل غير محدودة باتجاه تزايد دالة الهدف).

لذلك

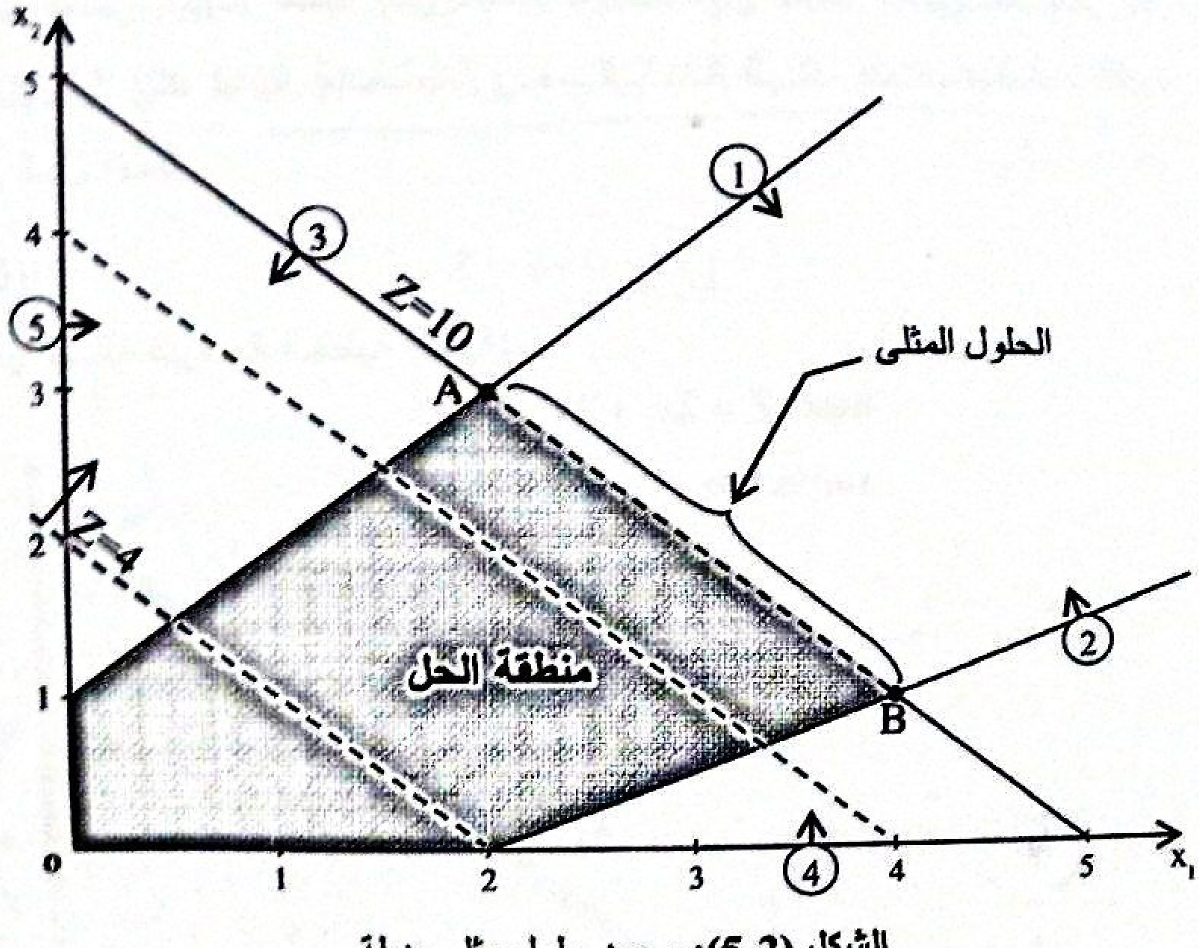
الشكل (2-5): وجود حلول مثلى بديلة.

2- حل غير محدود

بعض مسائل البرمجة الخطية لا تمتلك حلاً أمثلاً، ويمكن دوماً تحسين قيمة دالة الهد ضمن منطقة الحلول الممكنة، وهذه المسائل لا تقبل قيمة مثلى منتهية، ونقول أن لها حل غير محدود، وتظهر هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة غير محدودة في اتجاه واحد على الأقل، وهذا الاتجاه يتوافق مع الآتي:

- اتجاه تزايد دالة الهدف في مسألة Max.
- اتجاه تناقص دالة الهدف في مسألة Min.

تزايد قيمة Z يخرجه عن منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-5)، وبالتالي تمتلك دالة الهدف نفس القيمة المثلى عند أكثر من نقطة حل، وتكون نقاط القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ هي الحلول المثلى البديلة وأما القيمة المثلى فهي $Z = 10$.



الشكل (2-5): وجود حلول مثلى بديلة.

2-4-3 حالات خاصة عند تطبيق الحل البياني
(Special Cases in Graphical Solution Application)

1- حل أمثل بديل

تظهر الحلول المثلى البديلة عندما يكون لدالة الهدف نفس القيمة المثلى عند أكثر من نقطة حل، ويتجلى ذلك بيانياً عندما يتوازى مستقيم دالة الهدف مع معادلة أحد القيود المؤثرة على الحل الأمثل.

مثال (2-6):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\max\ Z = 2x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

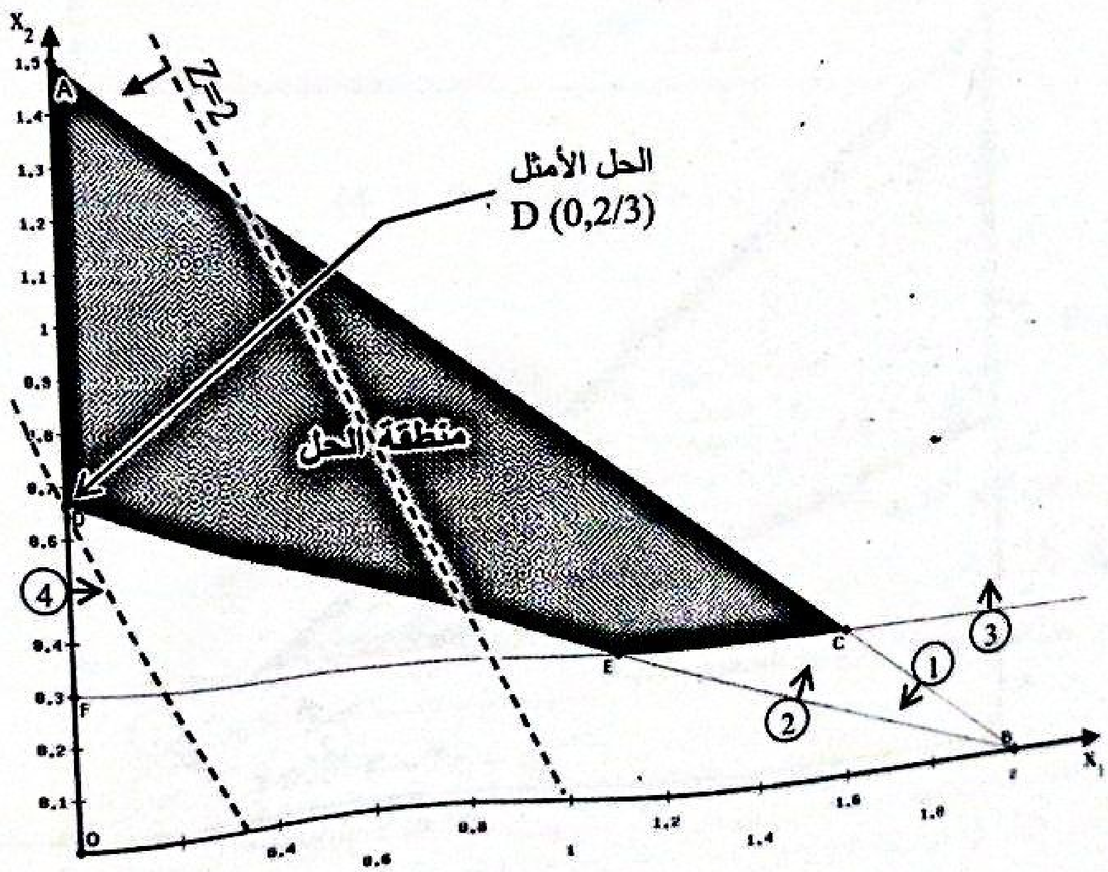
نرقم القيود كالآتي:

$-x_1 + x_2 \le 1$	(1)	$\leftarrow$	القيد الأول
$x_1 - 2x_2 \le 2$	(2)	$\leftarrow$	القيد الثاني
$x_1 + x_2 \le 5$	(3)	$\leftarrow$	القيد الثالث
$x_1 \ge 0$	(4)	$\leftarrow$	القيد الرابع
$x_2 \ge 0$	(5)	$\leftarrow$	القيد الخامس

ونرسم تلك القيود حتى يتم تحديد منطقة الحل ثم نأخذ قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن $Z = 4$، ونرسم مستقيم يمثل المعادلة $2x_1 + 2x_2 = 4$، وهي معادلة دالة الهدف عند القيمة الافتراضية، ثم نحدد على هذا المستقيم اتجاه تزايد قيمة Z وننقل تدريجياً هذا المستقيم بحيث يبقى موازياً لوضعه عند القيمة الافتراضية، ونلاحظ أن هذا المستقيم سيصل إلى حالة التماس مع منطقة الحل عند القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وأي انتقال باتجاه

بعد تحديد منطقة الحل، نأخذ قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن $Z=2$ ، ونرسم مستقيم يمثل المعادلة $2x_1+x_2=2$ ، وهي معادلة دالة الهدف عند القيمة الافتراضية، ثم نحدد على هذا المستقيم اتجاه تناقص قيمة Z وننقل تدريجياً هذا المستقيم بحيث يبقى موازياً لوضعه عند القيمة الافتراضية، ونلاحظ أن هذا المستقيم سيصل إلى حالة التماس مع منطقة الحل عند النقطة $D(0,\frac{2}{3})$ وأي انتقال باتجاه تناقص قيمة Z يخرجه عن منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-4)، وبالتالي فان النقطة $D(0,\frac{2}{3})$ هي الحل الأمثل وتكون القيمة المثلى:

$$Z=2\times 0+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$



الشكل (2-4): الحل البياني للمثال (2-5).

الحل:

نبدأ بترقيم تلك القيود كالآتي:

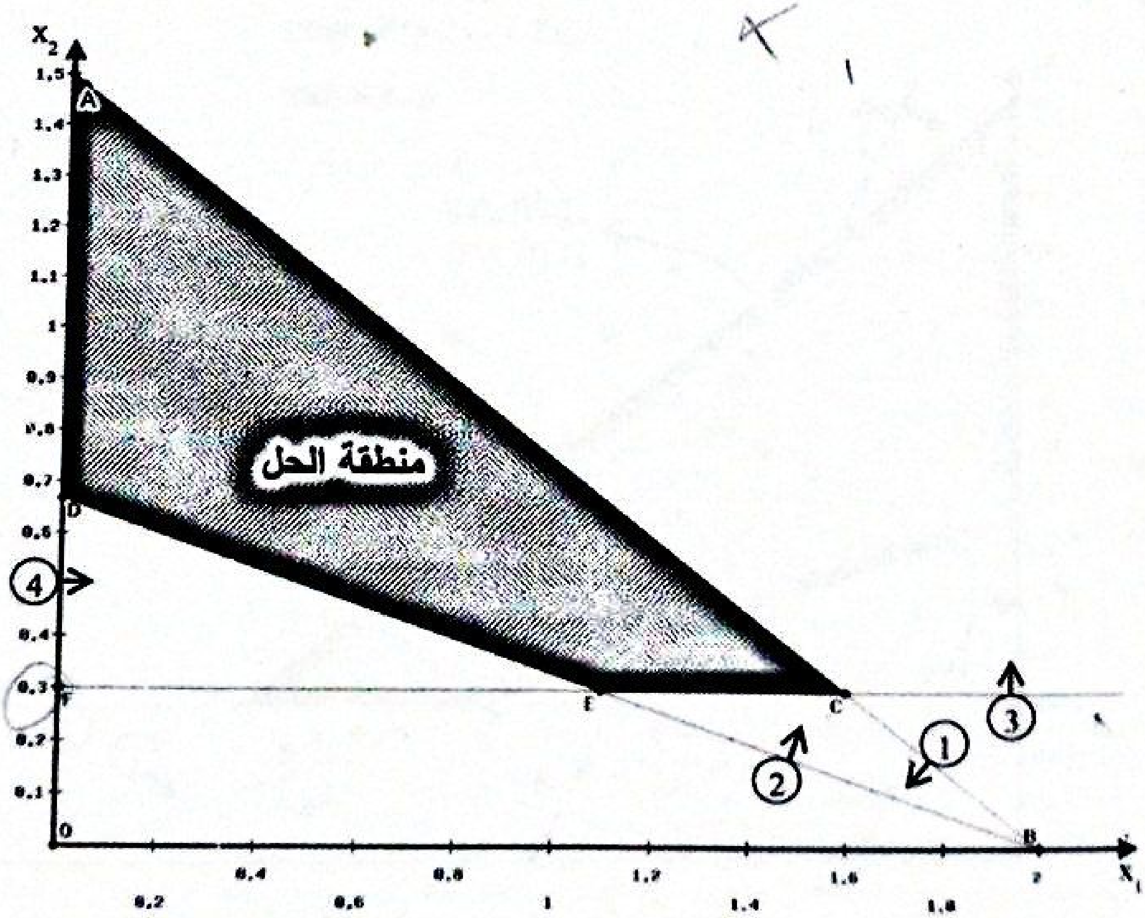
$3x_1 + 4x_2 \le 1$ (1) ← القيد الأول

$x_1 + 3x_2 \ge 2$ (2) ← القيد الثاني

$10x_2 \ge 3$ (3) ← القيد الثالث

$x_1 \ge 0$ (4) ← القيد الرابع

ثم نرسم معادلة القيد الأول، $3x_1 + 4x_2 = 1$، مستقيم يمر بالنقطتين $A(0,1.5), B(2,0)$، ونحدد على هذا المستقيم رقم القيد واتجاه المنطقة التي تحقق المتباينة $3x_1 + 4x_2 < 1$.



الشكل (2-3): منطقة الحل للمثال (2-5).

ثم نرسم المستقيم الذي يحقق معادلة القيد الثاني، $x_1 + 3x_2 = 2$، وهو يمر بالنقطتين $D(0,\frac{2}{3}), B(2,0)$، ونحدد عليه رقم القيد واتجاه المنطقة التي تحقق المتباينة $x_1 + 3x_2 > 2$، ونتابع حتى يتم تحديد منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-3).

2-4-2 الحل البياني لمسألة Min
(Graphical Solution of a Min Problem)

سنوضح الحل البياني لمسألة Min من خلال المثال الآتي:

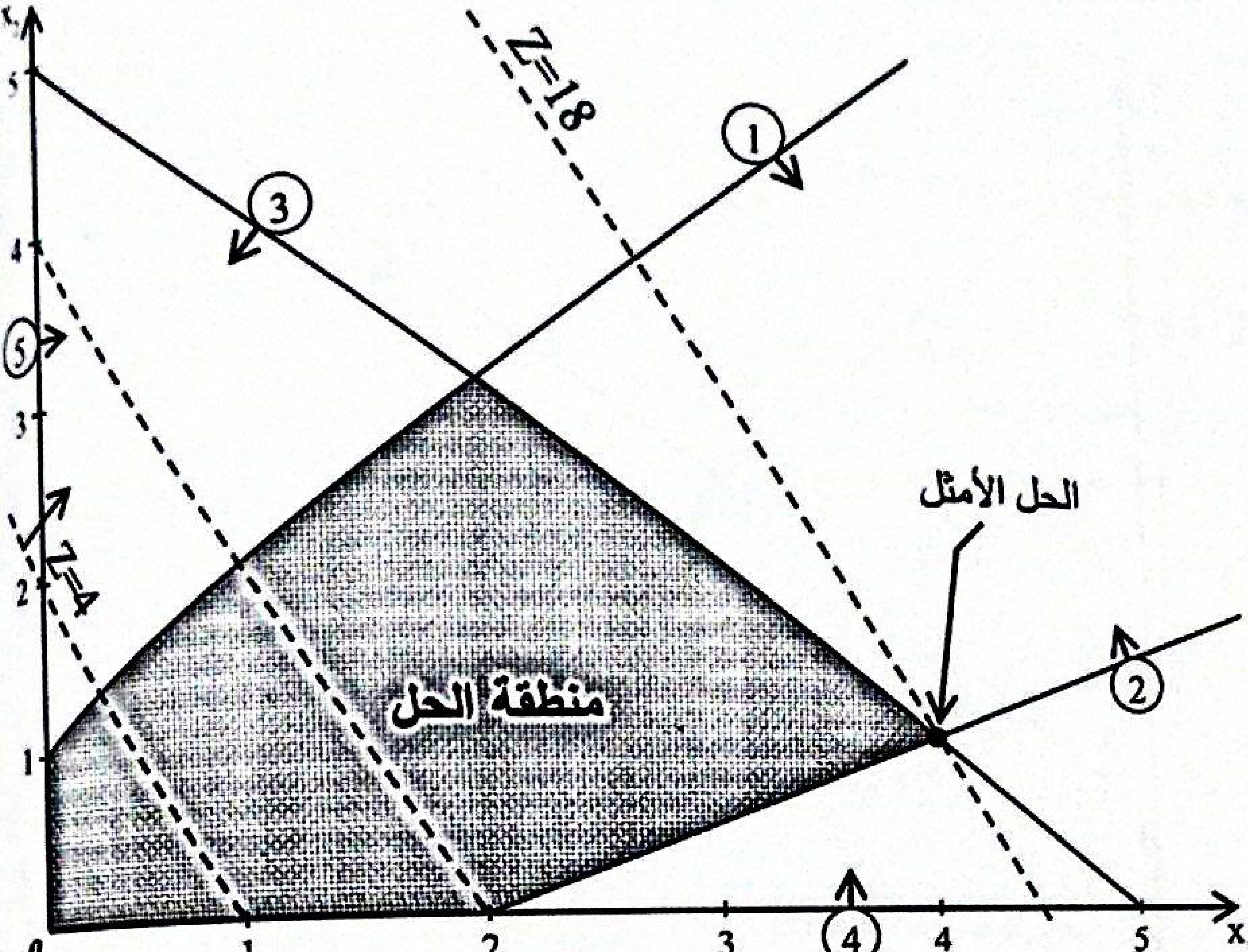
مثال (2-5):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية الآتية:

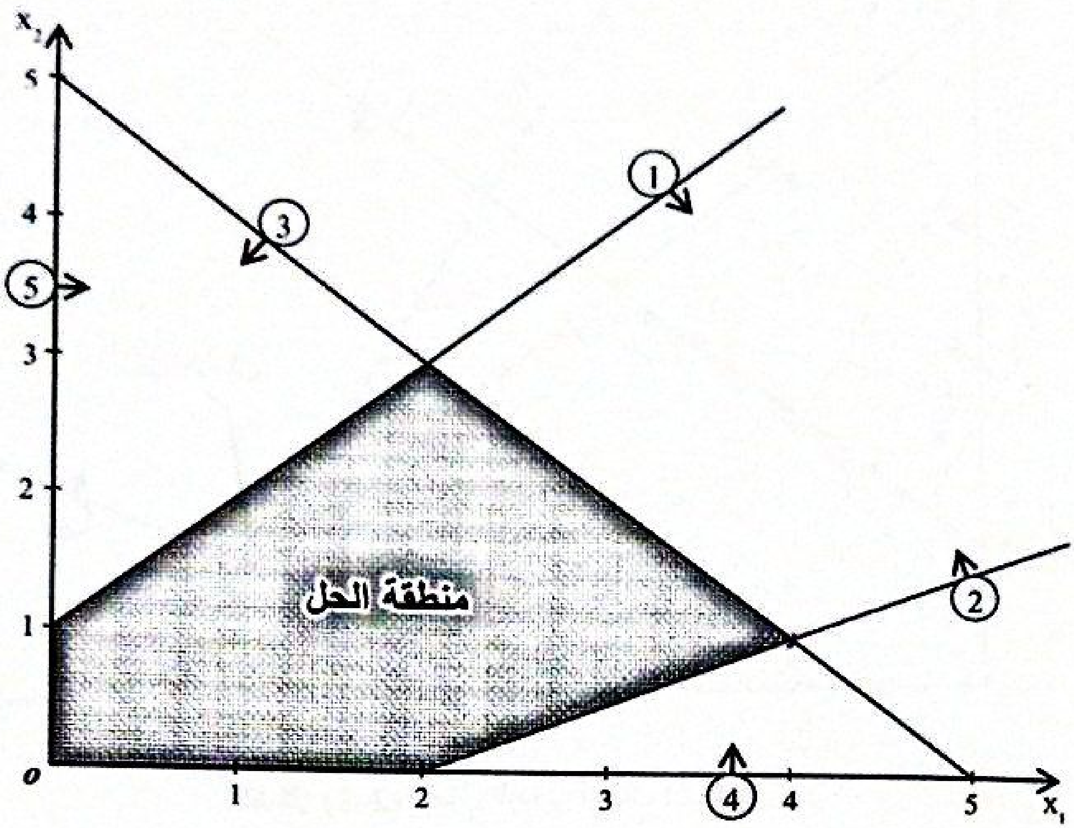
$$\min \ Z = 2x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 1 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 2 \\ 10x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$



الشكل (2-2): الحل البياني للمثال (2-4).



الشكل (2-1): منطقة الحل للمثال (2-4).

ثانياً: نأخذ قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن $Z = 4$ ، ونرسم مستقيم يمثل المعادلة $4x_1 + 2x_2 = 4$ ، وهي معادلة دالة الهدف عند القيمة الافتراضية، ثم نحدد على هذا المستقيم اتجاه تزايد قيمة Z وننقل تدريجياً هذا المستقيم بحيث يبقى موازياً لوضعه عند القيمة الافتراضية، ونلاحظ أن هذا المستقيم سيصل إلى حالة التماس مع منطقة الحل عند النقطة $(4,1)$ وأي انتقال باتجاه تزايد قيمة Z يخرجه عن منطقة الحل كما هو واضح بالشكل $(2-2)$،

وبالتالي فان النقطة $(4,1)$ هي الحل الأمثل وتكون القيمة المثلى:

$$Z = 4 \times 4 + 2 \times 1 = 18$$

ع

1-4-2 الحل البياني لمسألة Max
(Graphical Solution of a Max Problem)

سنوضح الحل البياني لمسألة Max من خلال المثال الآتي:

مثال (2-4):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\max \ Z = 4x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

أولاً: في المستوي x_1ox_2 ، نعمل على تحديد منطقة الحلول الممكنة التي تحقق جميع القيود، ونبدأ بترقيم تلك القيود كالآتي:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 && (1) \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 && (2) \\ x_1 + x_2 &\le 5 && (3) \\ x_1 &\ge 0 && (4) \\ x_2 &\ge 0 && (5) \end{aligned}$$

بالنسبة للقيد الأول $-x_1 + x_2 \le 1$ ، نرسم المستقيم الذي يحقق معادلة القيد وهي $-x_1 + x_2 = 1$ ثم نحدد على هذا المستقيم رقم القيد واتجاه المنطقة من المستوي x_1ox_2 التي تتحقق فيها المتباينة المتعلقة بهذا القيد، نكرر ذات الفكرة على باقي القيود حتى يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والتي تسمى اختصاراً منطقة الحل أو فضاء الحل، وتكون مستوفية لجميع القيود كما هو واضح بالشكل (2-1).

$$\max \quad Z = 300x_1 + 200x_2$$

subject to A B

$$5x_1 + 6x_2 \le 600$$
$$x_1 + 2x_2 \le 160$$
$$x_1 \le 80$$
$$x_2 \le 60$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

4-2 الحل البياني (Graphical Solution)

سندرس حل مسألة البرمجة الخطية التي تمتلك متحولي قرار بطريقة بيانية، وتسمى هذه الطريقة بالحل البياني، وبالرغم من اقتصار الحل البياني على مسائل البرمجة الخطية محدودة التطبيق بالمقارنة مع الخوارزميات التي تستطيع معالجة مسائل البرمجة الخطية الأكثر تعقيداً فان الحل البياني ساعد في التعرف على خصائص بعض الحلول وتمييز بعض الحالات الخاصة، وتتلخص خطوات الحل البياني كما يلي:

1- نرسم منطقة الحلول الممكنة، والتي تعتبر مستوفية لكل القيود.

2- نرسم مستقيم يمثل دالة الهدف عند قيمة افتراضية.

3- نحدد الاتجاه المناسب لدالة الهدف وفق الآتي:

- من أجل مسألة Max، نحدد اتجاه تزايد دالة الهدف.
- من أجل مسألة Min، نحدد اتجاه تناقص دالة الهدف.

4- نرسم مستقيمات متوازية تمثل دالة الهدف حتى نصل إلى مستقيم مماس لمنطقة الحلول الممكنة وبحيث أن أي انتقال لهذا المستقيم وفق الاتجاه المناسب يخرجه عن منطقة الحلول الممكنة.

5- يوجد عند كل نقطة من نقاط التماس حل أمثل.

3- حل غير ممكن

تظهر هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة خالية، ويدل ذلك على وجود تعارض بين القيود أو عدم الالتزام بالوفاء بجميع القيود في وقت واحد.

مثال (2-8):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية التالية:

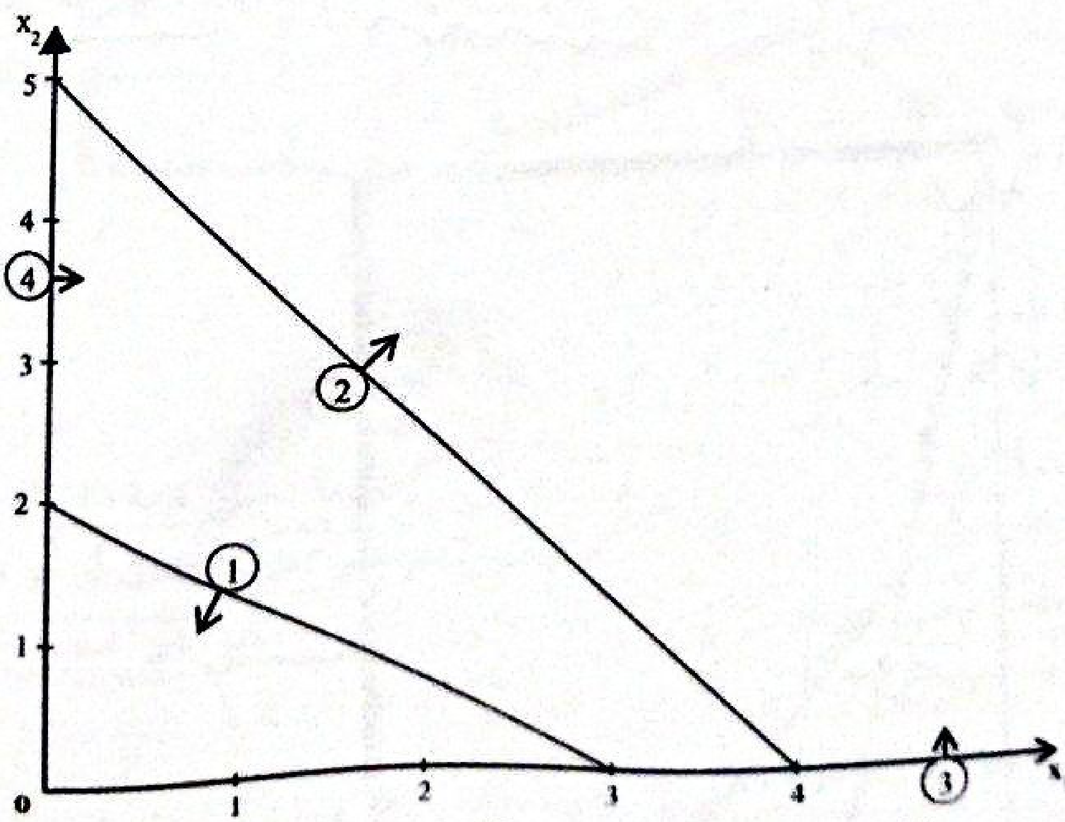
$$\max \ Z = 2x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 & (1) \\ 5x_1 + 4x_2 & \geq & 20 & (2) \\ x_1 & \geq & 0 & (3) \\ x_2 & \geq & 0 & (4) \end{array}$$

الحل:

منطقة الحلول الممكنة خالية كما هو واضح بالشكل (2-7)، وبالتالي الحل غير ممكن.



الشكل (2-7): حل غير ممكن (منطقة الحلول الممكنة خالية).

س
ع (١)

وتشير هذه الحالة لعيوب في بناء النموذج، ومن تلك العيوب نذكر الآتي:

- تجاهل قيد مهم ومؤثر.
- لم يتم تقدير معاملات القيود بشكل صحيح.

مثال (2-7):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية الآتية:

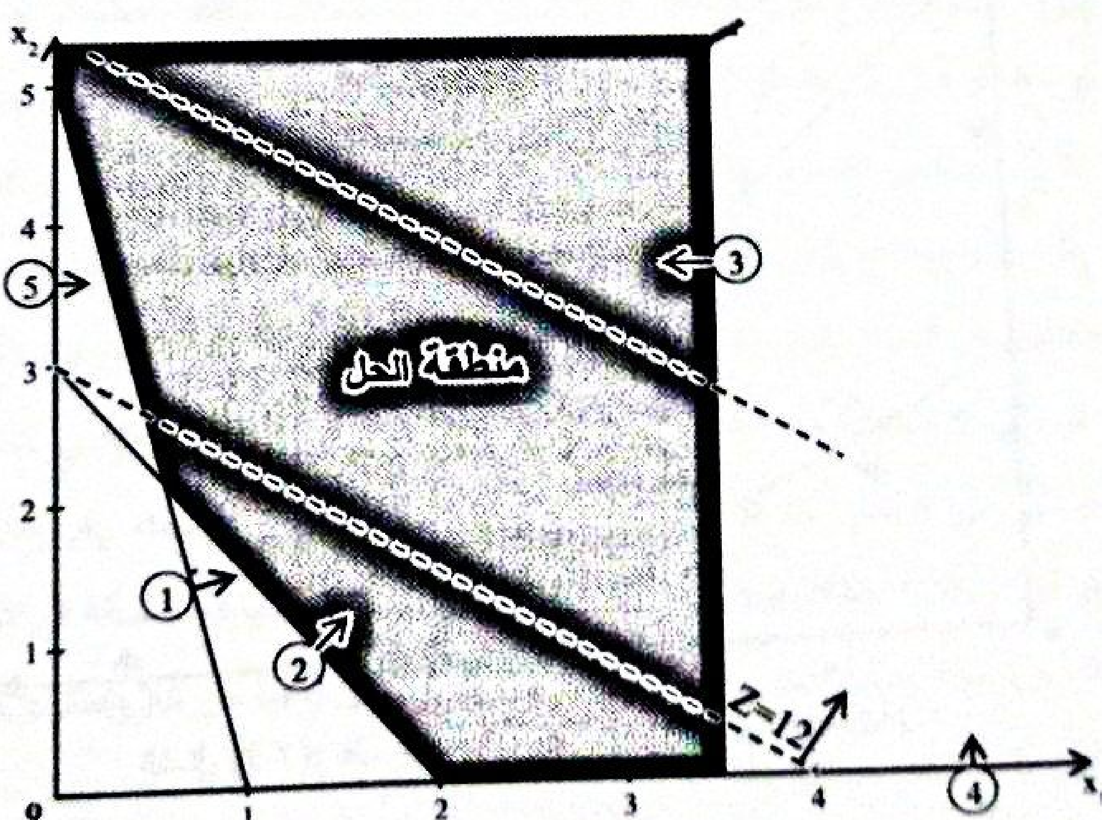
$$\max\ Z = 3x_1 + 4x_2$$

subject to

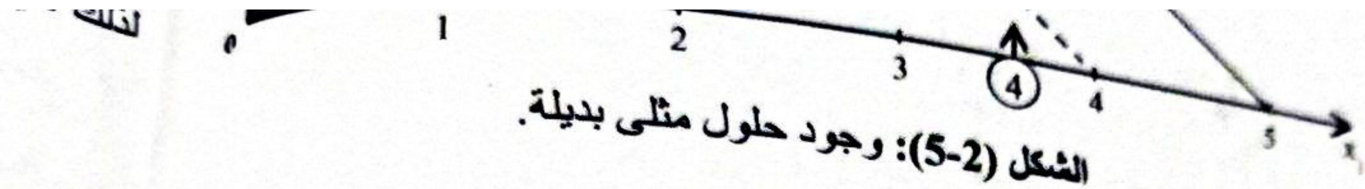
$$\begin{array}{lcll} 5x_1 + x_2 & \geq & 5 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 6 & (2) \\ 2x_1 & \leq & 7 & (3) \\ x_1 & \geq & 0 & (4) \\ x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

الحل:

منطقة الحل غير محدودة وذلك باتجاه تزايد دالة الهدف كما هو واضح بالشكل (2-6)، لذلك لدينا حل غير محدود.



الشكل (2-6): حل غير محدود (منطقة الحل غير محدودة باتجاه تزايد دالة الهدف).



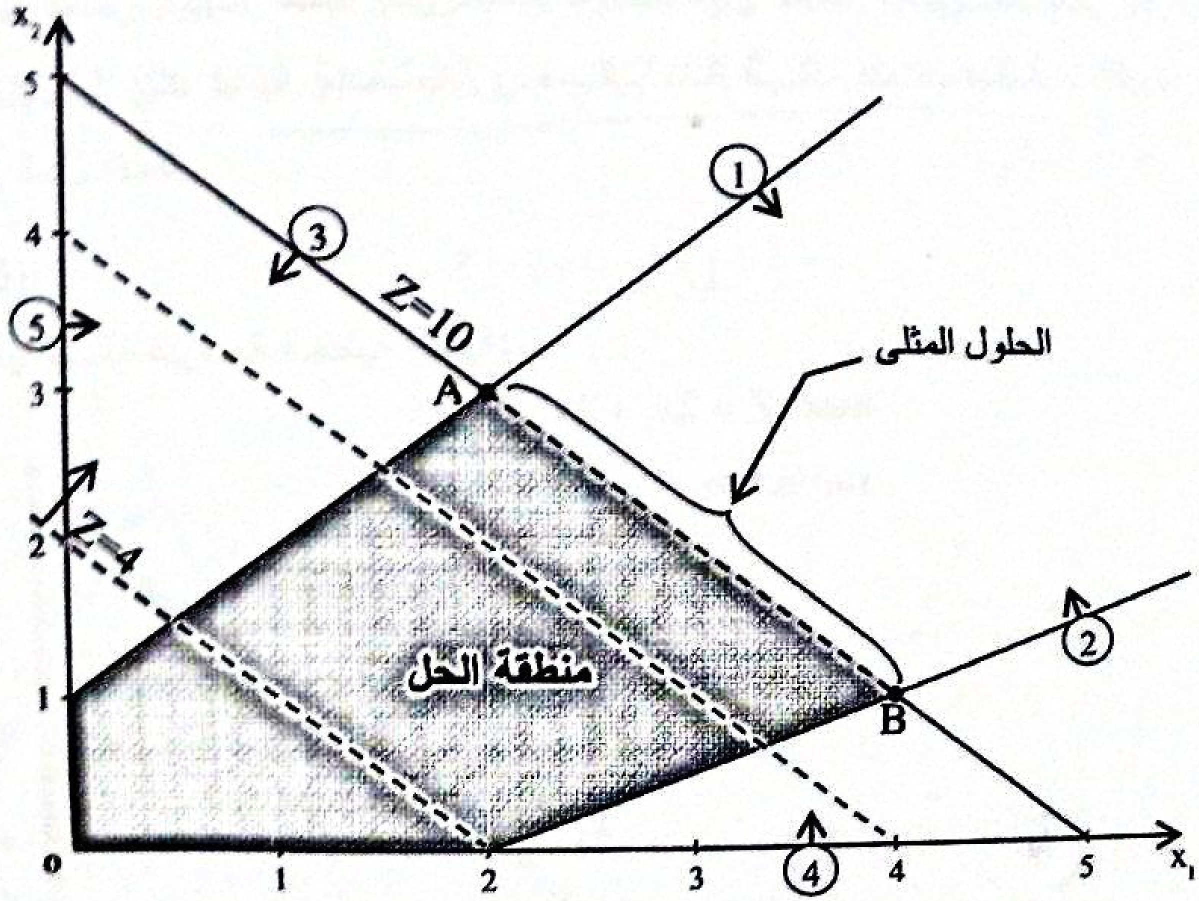
الشكل (2-5): وجود حلول مثلى بديلة.

2- حل غير محدود

بعض مسائل البرمجة الخطية لا تمتلك حلاً أمثلاً، ويمكن دوماً تحسين قيمة دالة الهد ضمن منطقة الحلول الممكنة، وهذه المسائل لا تقبل قيمة مثلى منتهية، ونقول أن لها حل غير محدود، وتظهر هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة غير محدودة في اتجاه واحد على الأقل، وهذا الاتجاه يتوافق مع الآتي:

- اتجاه تزايد دالة الهدف في مسألة Max.
- اتجاه تناقص دالة الهدف في مسألة Min.

تزايد قيمة Z يخرجه عن منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-5)، وبالتالي تمتلك دالة الهدف نفس القيمة المثلى عند أكثر من نقطة حل، وتكون نقاط القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ هي الحلول المثلى البديلة وأما القيمة المثلى فهي $Z = 10$.



الشكل (2-5): وجود حلول مثلى بديلة.

2-4-3 حالات خاصة عند تطبيق الحل البياني
(Special Cases in Graphical Solution Application)

1- حل أمثل بديل

تظهر الحلول المثلى البديلة عندما يكون لدالة الهدف نفس القيمة المثلى عند أكثر من نقطة حل، ويتجلى ذلك بيانياً عندما يتوازى مستقيم دالة الهدف مع معادلة أحد القيود المؤثرة على الحل الأمثل.

مثال (2-6):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\max \ Z = 2x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

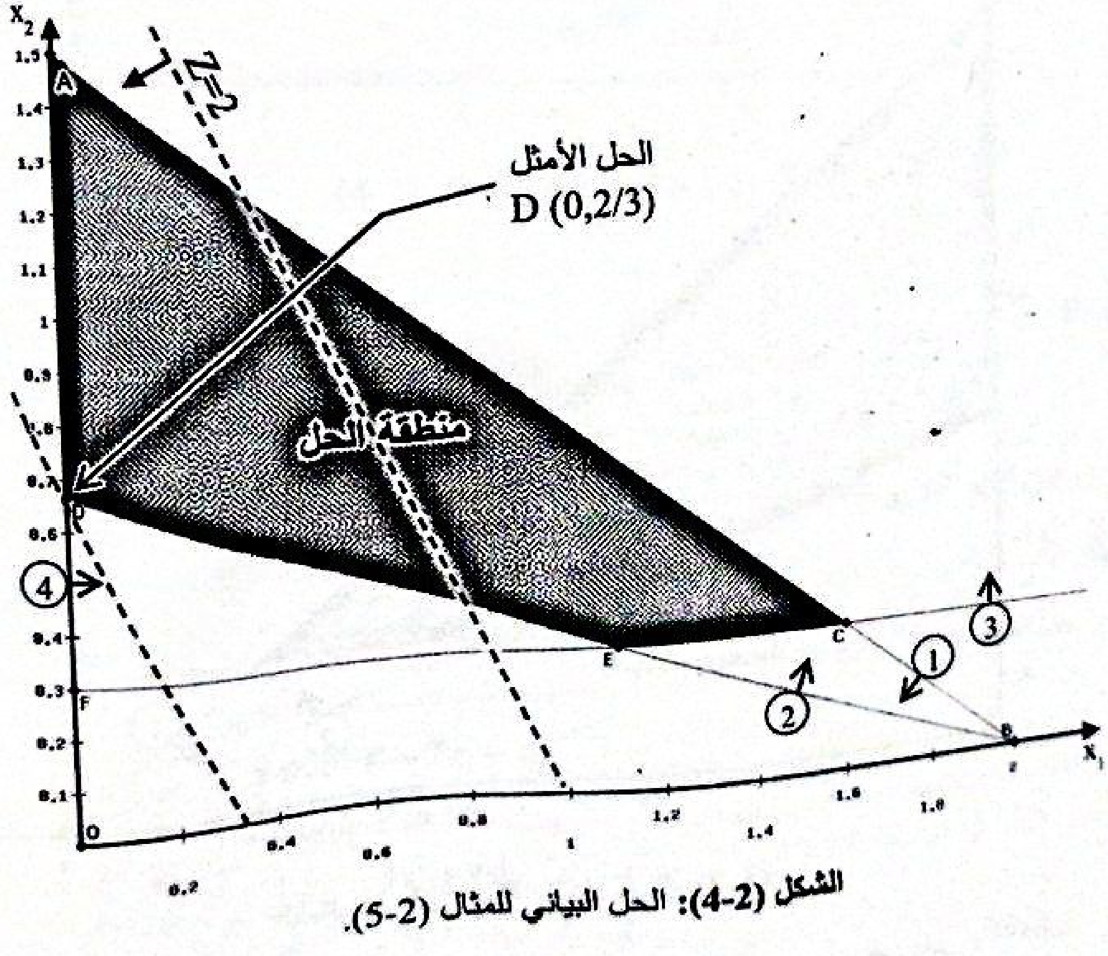
نرقم القيود كالآتي:

$-x_1 + x_2 \le 1$	(1)	$\leftarrow$	القيد الأول
$x_1 - 2x_2 \le 2$	(2)	$\leftarrow$	القيد الثاني
$x_1 + x_2 \le 5$	(3)	$\leftarrow$	القيد الثالث
$x_1 \ge 0$	(4)	$\leftarrow$	القيد الرابع
$x_2 \ge 0$	(5)	$\leftarrow$	القيد الخامس

ونرسم تلك القيود حتى يتم تحديد منطقة الحل ثم نأخذ قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن $Z = 4$، ونرسم مستقيم يمثل المعادلة $2x_1 + 2x_2 = 4$، وهي معادلة دالة الهدف عند القيمة الافتراضية، ثم نحدد على هذا المستقيم اتجاه تزايد قيمة Z وننقل تدريجياً هذا المستقيم بحيث يبقى موازياً لوضعه عند القيمة الافتراضية، ونلاحظ أن هذا المستقيم سيصل إلى حالة التماس مع منطقة الحل عند القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وأي انتقال باتجاه

بعد تحديد منطقة الحل، نأخذ قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن $Z = 2$ ، ونرسم مستقيم يمثل المعادلة $2x_1 + x_2 = 2$ ، وهي معادلة دالة الهدف عند القيمة الافتراضية، ثم نحدد على هذا المستقيم اتجاه تناقص قيمة Z وننقل تدريجياً هذا المستقيم بحيث يبقى موازياً لوضعه عند القيمة الافتراضية، ونلاحظ أن هذا المستقيم سيصل إلى حالة التماس مع منطقة الحل عند النقطة $D(0,\frac{2}{3})$ وأي انتقال باتجاه تناقص قيمة Z يخرجه عن منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-4)، وبالتالي فان النقطة $D(0,\frac{2}{3})$ هي الحل الأمثل وتكون القيمة المثلى:

$$Z = 2\times 0 + 1\times \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3}$$



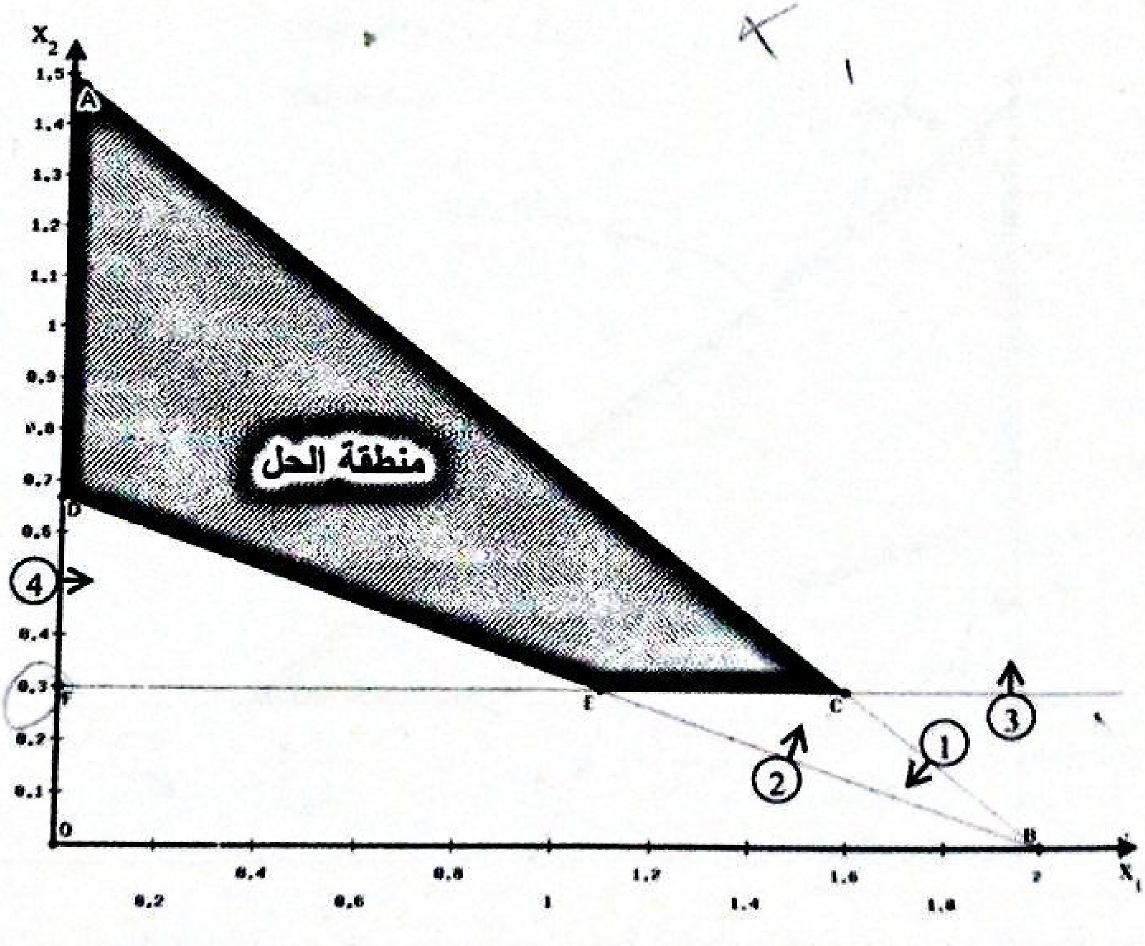
الشكل (2-4): الحل البياني للمثال (2-5).

الحل:

نبدأ بترقيم تلك القيود كالآتي:

القيد الأول ←	(1)	$3x_1 + 4x_2$	$\leq \; 1$
القيد الثاني ←	(2)	$x_1 + 3x_2$	$\geq \; 2$
القيد الثالث ←	(3)	$10x_2$	$\geq \; 3$
القيد الرابع ←	(4)	x_1	$\geq \; 0$

ثم نرسم معادلة القيد الأول، $3x_1 + 4x_2 = 1$ ، مستقيم يمر بالنقطتين $A\,(0,1.5)\,,B\,(2,0)$ ، ونحدد على هذا المستقيم رقم القيد واتجاه المنطقة التي تحقق المتباينة $3x_1 + 4x_2 < 1$.



الشكل (2-3): منطقة الحل للمثال (2-5).

ثم نرسم المستقيم الذي يحقق معادلة القيد الثاني، $x_1 + 3x_2 = 2$ ، وهو يمر بالنقطتين $D\,(0,\frac{2}{3})\,,B\,(2,0)$ ، ونحدد عليه رقم القيد واتجاه المنطقة التي تحقق المتباينة $x_1 + 3x_2 > 2$ ، ونتابع حتى يتم تحديد منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-3).

2-4-2 الحل البياني لمسألة Min
(Graphical Solution of a Min Problem)

سنوضح الحل البياني لمسألة Min من خلال المثال الآتي:

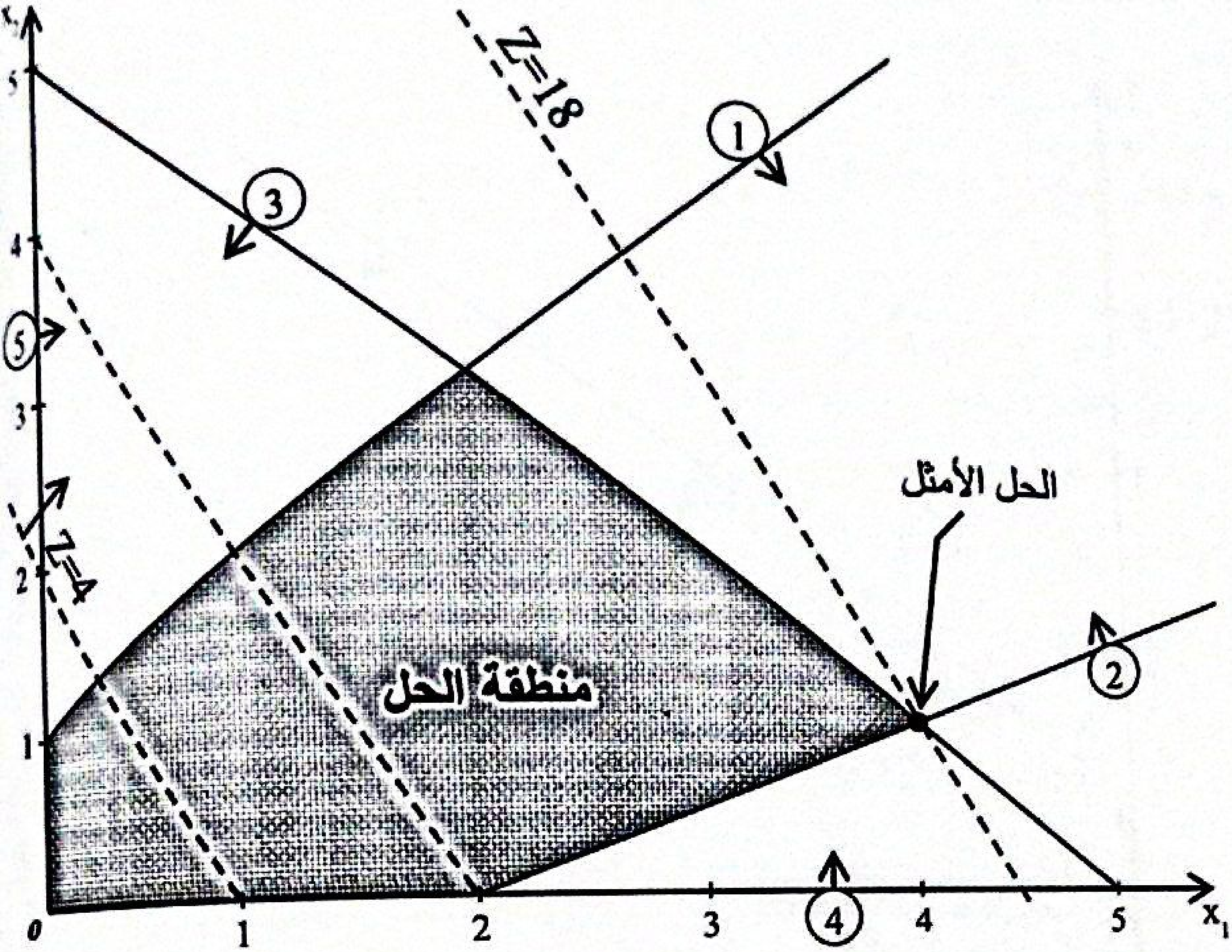
مثال (2-5):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية الآتية:

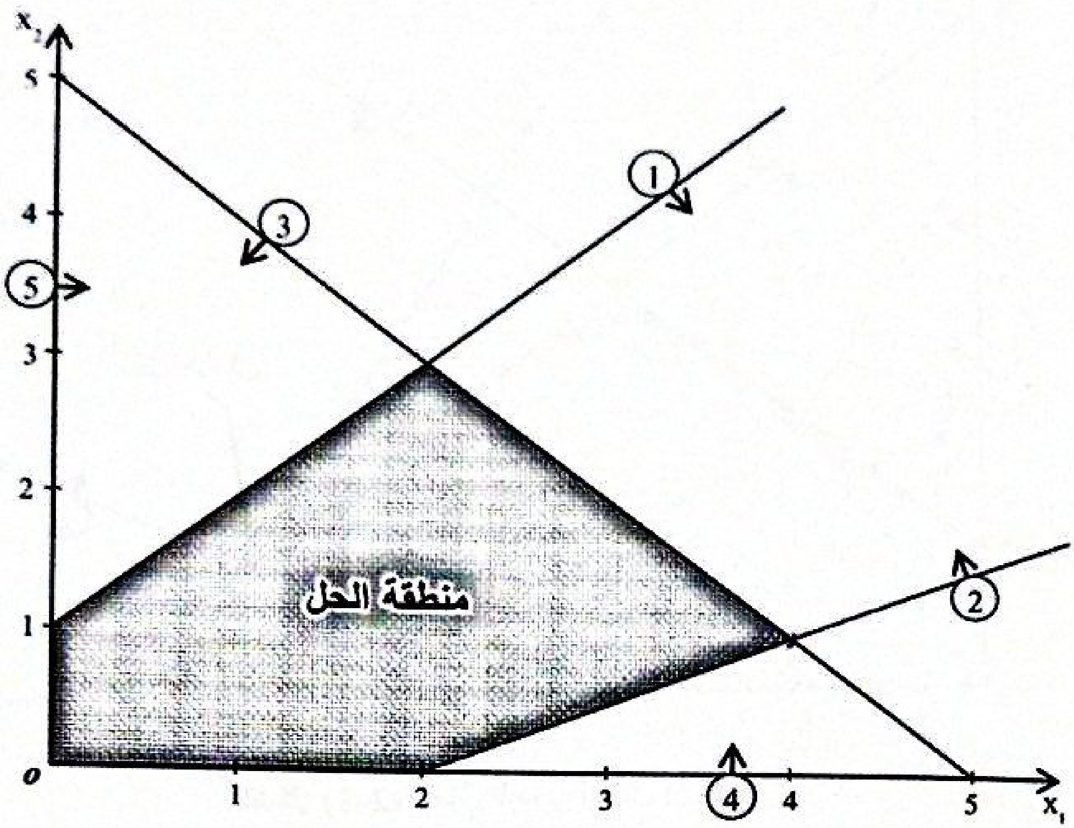
$$\min \; Z = 2x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 1 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 2 \\ 10x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$



الشكل (2-2): الحل البياني للمثال (2-4).



الشكل (2-1): منطقة الحل للمثال (2-4).

ثانياً: نأخذ قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن $Z = 4$، ونرسم مستقيم يمثل المعادلة $4x_1 + 2x_2 = 4$، وهي معادلة دالة الهدف عند القيمة الافتراضية، ثم نحدد على هذا المستقيم اتجاه تزايد قيمة Z وننقل تدريجياً هذا المستقيم بحيث يبقى موازياً لوضعه عند القيمة الافتراضية، ونلاحظ أن هذا المستقيم سيصل إلى حالة التماس مع منطقة الحل عند النقطة (4,1) وأي انتقال باتجاه تزايد قيمة Z يخرجه عن منطقة الحل كما هو واضح بالشكل (2-2).

وبالتالي فان النقطة (4,1) هي الحل الأمثل وتكون القيمة المثلى:

$$Z = 4 \times 4 + 2 \times 1 = 18$$

2-4-1 الحل البياني لمسألة Max
(Graphical Solution of a Max Problem)

سنوضح الحل البياني لمسألة Max من خلال المثال الآتي:

مثال (2-4):

حل بيانياً مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\max\ Z = 4x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

أولاً: في المستوي x_1ox_2، نعمل على تحديد منطقة الحلول الممكنة التي تحقق جميع القيود، ونبدأ بترقيم تلك القيود كالآتي:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 && (1) \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 && (2) \\ x_1 + x_2 &\le 5 && (3) \\ x_1 &\ge 0 && (4) \\ x_2 &\ge 0 && (5) \end{aligned}$$

بالنسبة للقيد الأول $-x_1 + x_2 \le 1$، نرسم المستقيم الذي يحقق معادلة القيد وهي $-x_1 + x_2 = 1$ ثم نحدد على هذا المستقيم رقم القيد واتجاه المنطقة من المستوي x_1ox_2 التي تتحقق فيها المتباينة المتعلقة بهذا القيد، نكرر ذات الفكرة على باقي القيود حتى يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والتي تسمى اختصاراً منطقة الحل أو فضاء الحل، وتكون مستوفية لجميع القيود كما هو واضح بالشكل (2-1).

$$\max \ Z = 300x_1 + 200x_2$$

subject to

$$5x_1 + 6x_2 \le 600$$
$$x_1 + 2x_2 \le 160$$
$$x_1 \le 80$$
$$x_2 \le 60$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

4-2 الحل البياني (Graphical Solution)

سندرس حل مسألة البرمجة الخطية التي تمتلك متحولي قرار بطريقة بيانية، وتسمى هذه الطريقة بالحل البياني، وبالرغم من اقتصار الحل البياني على مسائل البرمجة الخطية محدودة التطبيق بالمقارنة مع الخوارزميات التي تستطيع معالجة مسائل البرمجة الخطية الأكثر تعقيداً فان الحل البياني ساعد في التعرف على خصائص بعض الحلول وتمييز بعض الحالات الخاصة، وتتلخص خطوات الحل البياني كما يلي:

1- نرسم منطقة الحلول الممكنة، والتي تعتبر مستوفية لكل القيود.

2- نرسم مستقيم يمثل دالة الهدف عند قيمة افتراضية.

3- نحدد الاتجاه المناسب لدالة الهدف وفق الآتي:

- من أجل مسألة Max، نحدد اتجاه تزايد دالة الهدف.
- من أجل مسألة Min، نحدد اتجاه تناقص دالة الهدف.

4- نرسم مستقيمات متوازية تمثل دالة الهدف حتى نصل إلى مستقيم مماس لمنطقة الحلول الممكنة وبحيث أن أي انتقال لهذا المستقيم وفق الاتجاه المناسب يخرجه عن منطقة الحلول الممكنة.

5- يوجد عند كل نقطة من نقاط التماس حل أمثل.