كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تحليل تابعي

Subject

المحاضرة الرابعة [عملي]

السؤال الأول:

M فضاء جزئي من فضاء جاليرت H عندئذٍ:

$$\overline{M} = M^{\perp\perp}$$

الحل:

* $M \subseteq \overline{M}$

$$\Rightarrow \overline{M}^{\perp} \subseteq M^{\perp} \quad \ldots(1)$$

* $\forall u \in M^{\perp} \overset{??}{\Rightarrow} u \in \overline{M}^{\perp}$

ليكن: $v \in \overline{M}$ حيث $\forall$

$$\forall v \in \overline{M} : \exists v_n \in M ; v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$$

بما أن $u \in M^{\perp}$, $v_n \in M$

$$\langle u, v_n \rangle = 0$$

حسب الاستمرار والجداء الداخلي:

$$\langle u, v \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u, v_n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \overline{M}$$

$$\Rightarrow u \in \overline{M}^{\perp}$$

$$\Rightarrow M^{\perp} \subseteq \overline{M}^{\perp} \quad \ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن

$$\overline{M} = \overline{M}^{\perp\perp}$$

KORAN COPYBOOKS

Subject

السؤال الثاني: ليكن

$$T : L_2(-\infty, +\infty) \longrightarrow L_2(-\infty, +\infty[$$

$$T(f(t)) = \begin{cases} f(t) & ; \ t \geq 0 \\ -f(t) & ; \ t < 0 \end{cases}$$

اثبت ان T وحدي

الحل:

يكون T مؤثر وحدي اذا كان $TT^* = T^*T = I$

من تعريف مؤثر جلبرت المرافق.

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle$$

$$* \ \langle Tf, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{0} -f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

$$+ \int_{0}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\left(-\overline{g(t)}\right)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

$$* \ \langle f, T^* g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{T^* g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\overline{T^* g(t)}\,dt$$

$$+ \int_{0}^{\infty} f(t)\,\overline{T^* g(t)}\,dt$$

$$\Rightarrow T^* g(t) = \begin{cases} g(t) & ; \ t \geq 0 \\ -g(t) & ; \ t < 0 \end{cases}$$

KORAN COPYBOOKS

Subject

$$TT^*f(t) = \begin{cases} T(f(t)) & ; \ t \geq 0 \\ T(-f(t)) & ; \ t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(t) & ; \ t \geq 0 \\ f(t) & ; \ t < 0 \end{cases} = If(t)$$

$$\Rightarrow TT^* = I$$

$$T^*Tf(t) = \begin{cases} T^*f(t) & ; \ t \geq 0 \\ T^*(-f(t)) & ; \ t < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(t) & ; \ t \geq 0 \\ f(t) & ; \ t < 0 \end{cases}$$

$$= If(t)$$

$$\Rightarrow T^*T = I$$

بالتالي T مؤثر متحد

السؤال الثالث:

ليكن X فضاء الدوال المستمرة على المجال $[0, 2\pi]$ والمزود بجداء الداخلي المعرف بالمساواة:

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt$$

أثبت ان $(e_n)_{n \geq 1}$; $e_n = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$ متتالية متعامدة منظمة

أجل: $n \neq m$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \left\langle \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(n-m)t - \cos(n+m)t]\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-m} \sin(n-m)t - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)t \right]$$

KORAN COPYBOOKS

$= \frac{1}{2\pi} \times 0 = 0$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \left\langle \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 nt \, dt \qquad n = m$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2nt}{2} \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4n} \sin 2nt \right]_0^{2\pi} = 1$$

وبالتالي :

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ 1 & ; n = m \end{cases}$$

عندئذٍ " $(e_n)_{n \geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة

السؤال الرابع :

في فضاء هلبرت H اذا كان $x_n \xrightarrow{w} x$ ، $x_n \xrightarrow{s} x$ فإن : $\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\|$

اي x_n تتقارب بقوة من x .

الحل : يجب ان نبرهن ان $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle + \langle x, x \rangle$$

وبما ان $x_n \xrightarrow{w} x \Leftarrow \lim_{n \to \infty} \langle x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle$

Subject

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \sqrt{\|x_n\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle - \|x\|^2}$$

$$= \sqrt{\|x\|^2 - \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle + \|x\|^2}$$

$$= \sqrt{\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

(x_n) متقاربة بقوة من x $\Leftarrow$

انتهت المحاضرة