كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الثامنة [نظري]

ملاحظة: ليس بالضرورة كل مؤثر خطي ومحدد متراص

* من اجل ذلك سنعطي مثالاً على ذلك

مثال:

$$I: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

المؤثر الواحدي $Ix = x$

I خطي ومحدد (لا يحتاج برهان)

$$\dim \ell_2 = \infty$$

عندئذٍ I غير متراص حسب المبرهنة السابقة.

معيار التراص:

ليكن X، Y فضاءين نظيمين، $T: X \longrightarrow Y$ مؤثر خطي عندئذٍ:

T متراص $\Leftrightarrow$ من اجل أي متتالية محدودة (x_n) في X فإن (Tx_n) تحتوي على متتالية جزئية (Tx_{n_k}) متقاربة في Y

تعريف: $T: X \longrightarrow Y$ مؤثر خطي المجال $R(T) = T(X)$ إذا كان $T(X)$ منتهي البعد

مبرهنة: ليكن X، Y فضاءين نظيمين، $T: X \longrightarrow Y$ مؤثر خطي عندئذٍ:

① إذا كان T محدد، $\dim(T(X)) < \infty$ عندئذٍ المؤثر T متراص

② إذا كان $\dim X < \infty$ عندئذٍ T متراص

الإثبات:

① سنبرهن (1) حسب معيار التراص، ليكن (x_n) متتالية محدودة في X عندئذٍ $\|x_n\| < c < \infty$

لدينا $\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$ (لأن T محدد)

عندئذٍ $\|Tx_n\| \leq c_1 < \infty$

$\Leftarrow (Tx_n)$ متتالية محدودة في Y

* لدينا $T(X)$ فضاء جزئي منتهي البعد من فضاء نظيم Y

بالتالي $T(X)$ مغلقة و $T(X)$ تامة أيضاً

* لدينا مرهنة تقول بأن: كل متتالية محدودة تملك متتالية جزئية متقاربة بما أن (Tx_n) متتالية محدودة في Y عندئذ (Tx_n) تملك متتالية جزئية (Tx_{n_k}) متقاربة من عنصر مثلاً y بما أن $T(X)$ مغلقة، (Tx_{n_k}) متتالية جزئية من $T(X)$ متقاربة من عنصر مثلاً y عندئذ $y \in T(X)$ أي y

أصبح لدينا: (x_n) متتالية محدودة كيفية في X فإن (Tx_n) كون متتالية جزئية (Tx_{n_k}) متقاربة من عنصر من Y بالتالي T متراص.

(2) لدينا فرضاً $\dim X < \infty$ عندئذ T محدد حسب المرهنة (تحليل تابعي 1) [كل مؤثر خطي على فضاء شعاعي X منتهي البعد محدد]

لدينا حسب مرهنة:

[T مؤثر خطي، $\dim D(T) = n$ $\Leftrightarrow$ $\dim R(T) \leq n$]

$\dim T(X) \leq \dim X < \infty$

$\Rightarrow \dim T(X) < \infty$

عندئذ حسب (1) يكون T متراص

ملاحظة:

كل مؤثر خطي محدد ومنتهي البعد متراص

مرهنة:

ليكن X, Y فضاءين منظمين، $T: X \to Y$ مؤثر خطي متراص، ليكن (x_n) متتالية في X تتقارب بصفة من x، $x_n \xrightarrow{w} x$ عندئذ (Tx_n) تتقارب بقوة في Y ونهايتها $Tx \in Y$

ملاحظة 1:

$S: X \to Y$ مؤثر خطي ومحدود، $T: Y \to Z$ مؤثر خطي ومحدود، وكان أحد المؤثرين T, S متراص فإن $TS: X \to Z$ متراص

ملاحظة 2:

$T: X \to Y$ مؤثراً خطياً متراصاً عندئذ T^n متراص حيث $n = 1, 2, \ldots$

تمرين 1 : ليكن H فضاء هلبرت و $\dim H = \infty$ ، $T: H \to H$

متراص بالتالي T غير قابل للقلب

الإثبات : نفرض T قابل للقلب عندئذ T^{-1} موجود ومحدد،

$$T^{-1}: H \longrightarrow H$$

حسب برهنة

$$T T^{-1} = I$$

عندئذ I متراص وهذا مرفوض بالتالي (محدد) (متراص كون $\dim H = \infty$)

الفرض الكبي خاطئ عندئذ T ليس قابل للقلب

ملاحظة :

المؤثر المتراص المعرف على فضاء هلبرت غير منتهي البعد غير قابل للقلب

تمرين 2 :

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$T(x_1, x_2, \dots) = (2x_1, 0, 2x_2, 0, \dots)$$

أثبت أن T خطي ومحدد ثم تحقق اذا كان T متراص

الحل :

T خطي ومحدد يترك للطالب

نفرض جدلاً بأن T متراص ، لنأخذ المؤثر

$$S: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$S(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_5}{2}, \dots\right)$$

S خطي ومحدد

$$(ST)x = S(Tx) = S(T(x_1, x_2, \dots)) = S(2x_1, 0, 2x_2, 0, 2x_3, 0, \dots)$$

$$= (x_1, x_2, \dots) = x$$

$$= I(x_1, x_2, \dots)$$

$$\Rightarrow ST = I$$

أي I متراص ، هذا مرفوض ، لأن I غير متراص (متراص خطي ومحدد في الفضاءات غير منتهية البعد ، بالتالي سنتج بأن T غير متراص

تمرين 3 :

المؤثر الصفري المعرف على اي فضاء منظم متراص $T: X \to Y$

$$Tx = 0$$

الحل : $R(T) = \{0\}$ أي T منتهي البعد (القاعدة $\{1, 0, 0, \dots\}$: $R(T_1)$ القاعدة في 1 ، $R(T_2)$: $\{(1, \dots), (0, 1, \dots)\}$ القاعدة في 2 عدد عناصرها)

T خطي ومحدد ، $\|x\| = 1 \Rightarrow \|Tx\| = \|0\| = 0$

T متراص (كل مؤثر خطي ومحدد منتهي البعد يكون متراص)

مبرهنة:

X فضاء ناظمي و Y فضاء باناخ، (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة والمتراصة ومتقاربة من المؤثر T فإن T متراص

نتيجة:

X فضاء ناظمي و Y فضاء باناخ، (T_n) متتالية من المؤثرات المحدودة ومنتهية البعد ومتقاربة من المؤثر T فإن T متراص

مثال:

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$Tx = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \dots\right)$$

أثبت ان T متراص

الحل: لنأخذ المتتالية $T_n(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, 0, 0, \dots\right)$

وهي متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة

* T_n مؤثرات منتهية البعد

$$\|(T-T_n)(x)\|^2 = \|Tx - T_n(x)\|^2 = \left\|\left(0, 0, \dots, 0, \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{x_{n+2}}{2^{n+2}}, \dots\right)\right\|^2$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2 \leq \frac{1}{(2^{n+1})^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \frac{1}{(2^{n+1})^2} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$= \frac{1}{(2^{n+1})^2} \|x\|^2 \quad ; \quad \forall x \in \ell_2$$

عندما $n \to \infty$ يكون:

$$\|(T-T_n)(x)\| \longrightarrow 0$$

إذن T_n متقاربة من T بالتالي T متراص

تمرين:

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$T(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_1}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

أثبت ان T متراص

الحل: T خطي ومحدد لنبرهن بأن T متراص، نأخذ المتتالية

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المنتهية البعد فهي متراصة

ولنبرهن بأنها متقاربة من المؤثر T

$\forall x \in \ell_2 \quad ; \quad \|(T-T_n)(x)\|^2 = \|(0,0,\dots,\frac{x_{n+1}}{n+1},\dots)\|^2$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{i}\right|^2 \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$\Rightarrow \|(T-T_n)(x)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

T_n متقاربة من T $\Leftarrow$ T متراصة

تعريف $L_p(\Omega)$:

هو صفوف كل التوابع f القابلة للقياس على Ω والتي تحقق الشرط

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

مثال: $\Omega =]0, \frac{1}{2}]$ ، $f(x) = \left(x \ln^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$ ، حل $f \in L_1(\Omega)$

الحل: نضع $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = t \Leftarrow \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} dx = dt$

$$\Rightarrow dt = -\frac{dx}{x}$$

$x \to \frac{1}{2}$: $\ln\frac{1}{x} = t \Rightarrow \ln 2 = t$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}^{\ln 2} -\frac{dt}{t^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{t}\right]_{\ln\frac{1}{\varepsilon}}^{\ln 2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

$$f \in L_1(\Omega) \Leftarrow$$

مثال: $\Omega =]0, 16[$ ، $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$ ، حل $f \in L_1(\Omega)$ ، $f \notin L_4(\Omega)$

* $\int_0^{16} |f(x)|\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{16} x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}\right]_{\varepsilon}^{16}$: الحل

$= \frac{32}{3} < \infty$

$f \in L_1(\Omega)$ ⇐

* $\int_0^{16} |f(x)|^4\,dx = \int_0^{16} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{16} \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln x]_{\varepsilon}^{16} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln(16) - \ln \varepsilon) = \ln 16 + \infty = \infty$

$f \notin L_4(\Omega)$ ⇐

انتهى الحل ...

مكتبة A to Z