كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة التطبيق المفتوح ومبرهنة المخروط المحدود:

إن المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X لفضاء باناخ Y هو تطبيق مفتوح، إذا كان متبايناً وغامراً فإن T^{-1} مستمر ومحدود (مفهوم متكافئان)

* سنقدم الآن مبرهنة تبين ما هي الشروط متى يكون مؤثر خطي مغلق محدود

مبرهنة البيان المغلق:

ليكن X، Y فضاءي باناخ، وليكن $T: D(T) \to X$ مؤثراً خطياً مغلقاً حيث $D(T)$ جزء من X عندئذ إذا كانت $D(T)$ مغلقة في X فإن المؤثر T يكون محدوداً.

مبرهنة [المؤثر الخطي المغلق]:

ليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثراً خطياً حيث $D(T) \subset X$، حيث X، Y فضاءان منظمان عندئذ الشرط اللازم والكافي كي يكون T مغلق هو أن تتحقق الحالة الآتية:

إذا كان $x_n \to x$ حيث $x_n \in D(T)$، كان $Tx_n \to y$

فإن $x \in D(T)$، $Tx = y$

ملاحظة:

محدود مؤثر لا يقتضي الانغلاق

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

زوران حام

تمهيدية [المؤثر المغلق]:

ليكن Y فضاءً $T:D(T)\to Y$ مؤثراً خطياً محدوداً حيث $D(T)$ جزء من X حيث X و Y فضاءان منظمان عندئذٍ نحصل على:

1. إذا كانت $D(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X فإن T مغلق
2. إذا كان T مغلقاً و Y تاماً فإن $D(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X

الإثبات:

1. ليكن (x_n) متتالية في $D(T)$ متقاربة من x مثلاً وبحيث تكون المتتالية (Tx_n) متقاربة كذلك، وبما أن $D(T)$ مغلقة فإن $\overline{D(T)}=D(T)$، عندئذٍ $x\in D(T)$ حسب المبرهنة (الشرط اللازم والكافي كي يكون M مغلقة هو أن يكون أي متتالية (x_n) من عناصر M متقاربة من x و $x\in M$)

* كما أن $Tx_n\to Tx$ لكون T مستمر حسب المبرهنة ١١ T خطي ومحدود $x_n\to x$ حيث $x_n,x\in D(T)$ $\Rightarrow Tx_n\to Tx$ عندئذٍ حسب مبرهنة خ أن T مغلق

2. $\forall x\in\overline{D(T)}$ توجد متتالية (x_n) في $D(T)$ بحيث $x_n\to x$، وبما أن T محدود خطي

$$\|Tx_n-Tx_m\|=\|T(x_n-x_m)\|\le\|T\|\cdot\|x_n-x_m\|$$

بالتالي (Tx_n) متتالية كوشي وبما أن X تاماً فإن (Tx_n) متقاربة من $y\in Y$ أي $Tx_n\to y\in Y$

وبما أن T مغلق فإن $x\in D(T)$، $y=Tx$ $\Leftarrow$

$D(T)=\overline{D(T)}$ محققة وبما أن $D(T)\subset\overline{D(T)}$ ، $\overline{D(T)}\subset D(T)$

أي $D(T)$ مغلق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

النقطة الثابتة لباناخ :

تعريف النقطة الثابتة :

ليكن X مجموعة ما , $T: X \to X$ تطبيق ما , تعرّف النقطة الثابتة للتطبيق T بأنها النقطة $x \in X$ بحيث يكون صورتها وفق T هي النقطة ذاتها اي ان $Tx = x$

بمعنى ((الصورة Tx تتطابق مع العنصر x))

* مثال : التطبيق المطابق $I: X \to X$

$Ix = x$

يملك عدد لا نهائي من النقاط الثابتة

* مثال : $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Tx = x^2$

التطبيق له نقطتان ثابتتان هما $x = 1$, $x = 0$

* مثال : $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x,0)$

التطبيق يملك عدد لا نهائي من النقاط الثابتة وهي $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; (x,0)$ اي نقاط المحور الحقيقي

* مثال : $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Tx = x + a \; ; \mathbb{R} \ni a \neq 0$

$\Leftarrow$ T لا يملك نقاط ثابتة

تعريف تطبيق ليبشتز :

ليكن (X,d) فضاء متري وليكن $T: X \to X$ يقال عن T بأنه ليبشتز على X اذا حقق الشرط :

$d(Tx, Ty) \leq K \, d(x,y) \quad \forall x,y \in X \; ; \; K \in \mathbb{R}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف (تطبيق هاغط) التقلص

ليكن (X,d) فضاء متري و $T: X \to X$ يدعى التطبيق تقلصياً على X إذا وجد عدد حقيقي α حيث $0 < \alpha < 1$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x,y)$$

// يعني هذا هندسياً لأي نقطتين x, y صورتين أقرب واحداهما إلى الأخرى من قرب النقطتين x, y من بعضهما //

نظرية الاستمرار:

إن التقلص T على فضاء متري هو تطبيق مستمر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon$$

التوضيح:

بما أن T تقلص يوجد $0 < \alpha < 1$ تحقق

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x,y) < \alpha\delta = \varepsilon$$

$\Leftarrow T$ مستمر

مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (مبرهنة التقلص):

ليكن $X = (X,d)$ فضاء متري تام، $T: X \to X$ تقلصياً على X فإنه يوجد T نقطة ثابتة وحيدة

* مثال: هام

ليكن $X = \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$ ، ليكن $T: X \to \mathbb{R}$ حيث

$$Tx = \frac{2x+6}{3x+2}$$

والمطلوب: ① هل X تام

② اثبت ان f تقلص

③ اوجد النقطة الثابتة للتطبيق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: ① $\overline{X} = \left[\frac{2}{3}, \infty\right[= X$ أي X مغلقة في $\mathbb{R}$ التام

X تام $\Leftarrow$

② $d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left| \frac{2x+6}{3x+2} - \frac{2y+6}{2y+2} \right|$

$= \frac{14|x-y|}{|(3x+2)(3y+2)|} \leq \frac{14}{16}|x-y| = \frac{7}{8}|x-y|$

$x > \frac{2}{3}$ ، $3x+2 > 4$ ، $3y+2 > 4$

$\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \frac{7}{8}|x-y| = \alpha\, d(x,y)$

حيث $0 < \alpha = \frac{7}{8} < 1$ $\Leftarrow$ T تقلص

③ بما أن T تقلص و X فضاء تام $\Leftarrow$ يوجد للتطبيق نقطة ثابتة وحيدة لإيجادها نحل المعادلة $Tx = x$

$\frac{2x+6}{3x+2} = x \Rightarrow x^2 = 2$

نقبل $x = \sqrt{2} \in X$ إما

أو $x = -\sqrt{2} \notin X$ مرفوض

تعريف المجموعة المحدودة:

$(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم، يقال عن المجموعة $M \subset X$ إنها مجموعة محدودة إذا وجد عدد $0 < c < \infty$ بحيث:

$\forall x \in M: \|x\| \leq c < \infty$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف المجموعة المتراصة:

X فضاء متري، يُقال عن المجموعة $M \subset X$ إنها متراصة في X إذا كانت كل متتالية (x_n) من عناصر M تحوي على متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من عنصر في M

نذكر الآن ببعض المفاهيم من التحليل التالي:

تغطية التراص:

كل مجموعة جزئية متراصة في فضاء متري هي مجموعة مغلقة ومحدودة

مبرهنة التراص:

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم منتهي البعد متراصة هو أن تكون مغلقة ومحدودة

تعريف المؤثر المتراص:

ليكن X ، Y فضاءين منظمين، $T: X \to Y$ مؤثراً خطياً يُقال بأن المؤثر T متراص إذا كانت صورة كل مجموعة محدودة في X وفق T متراصة

مبرهنة:

ليكن X ، Y فضاءين منظمين، $T: D(T) = X \to Y$ مؤثراً خطياً متراصاً عندئذٍ T محدود

الإثبات:

نأخذ الكرة الواحدية $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$

U محدودة حسب تعريفها ولدينا أن T متراص عندئذٍ $T(U)$ متراصة في Y حيث $T(U) = \{Tx ; x \in U\}$ وبالتالي $\|Tx\| \leq c < \infty$ مغلقة ومحدودة أي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$

$\Leftarrow T$ محدود

* ملاحظة 1: كل مؤثر خطي متراص، محدود في فضاء منظم
* ملاحظة 2: كل مؤثر خطي متراص، مستمر في فضاء منظم

** مرهنة البعد المنتهي (تابع 1):

ليكن X فضاء منظم، إذا كانت الكرة الواحدية المغلقة

$M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

متراصة في X عندئذٍ X منتهي البعد

** مرهنة: ريسز

ليكن X فضاء منظم، $\dim X = \infty$، المؤثر الطابق $I : X \to X$

$Ix = x$

عندئذٍ I غير متراص

الإثبات:

لنأخذ الكرة الواحدية المغلقة $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ نلاحظ أنها محدودة

* نفرض جدلاً بأن I متراص عندئذٍ $I(M) = M$ متراصة في X، عندئذٍ حسب مرهنة البعد المنتهي يكون $\dim X < \infty$، هذا مرفوض إذاً الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي I غير متراص.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة