كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة [التقارب الضعيف]

ليكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضاء منظم X كما نعلم يكون مثلاً $x_n \xrightarrow{w} x$ عندئذٍ لدينا مايلي:

1. النهاية الضعيفة x لـ (x_n) وحيدة
2. كل متتالية جزئية من (x_n) تتقارب بضعف من x
3. المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة

مبرهنة التقارب الضعيف و التقارب القوي:

سؤال: ماهي العلاقة بين التقارب القوي والتقارب الضعيف

مبرهنة:

ليكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X بالتالي التقارب القوي يؤدي إلى التقارب الضعيف

الإثبات:

ليكن (x_n) متتالية متقاربة بقوة نحو x في الفضاء المنظم X

$$x_n \xrightarrow{s} x \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

و لنبرهن بأن $x_n \xrightarrow{w} x$

أي سنبرهن أن: $\forall f \in X' \quad f(x_n) \to f(x)$

$$0 \le |f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le \|f\| \, \|x_n - x\|$$

$\Rightarrow \lim |f(x_n) - f(x)| = 0$

$\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

مرهنة ريس:

يمكن تمثيل كل داي خطي محدد f على فضاء هلبرت H بدلالة الجداء الداخلي على النحو التالي:

$f(x) = \langle x, z \rangle$

حيث z تابع لـ f يتعين بصورة وحيدة بـ f ونظيمه هو $\|z\| = \|f\|$

ملاحظة:

التقارب الضعيف لا يؤدي بالضرورة إلى التقارب القوي وسنبين ذلك من خلال المثال التالي

مثال:

ليكن (e_n) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H، أثبت أنها متقاربة ضعيفاً من الصفر وغير متقاربة بقوة من الصفر

الحل:

أنه يوجد $f \in H'$ تمثيل ريس $f(x) = \langle x, z \rangle$ فإن:

$f(e_n) = \langle e_n, z \rangle$

نطبق متراجحة بسل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\langle z, e_n \rangle}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المسلمة في الطرف الأيسر متقاربة حسنئذٍ حدها العام يسعى إلى الصفر

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0 = \langle 0, z\rangle = f(0)$$

$$f(e_n) \longrightarrow f(0) \Rightarrow e_n \xrightarrow{w} 0 \qquad \forall f \in M'$$

$n \to \infty$

نلاحظ بأن المتتالية (e_n) تتقارب بضعف من الصفر

* ولكن (e_n) لا تتقارب بقوة من الصفر لأن:

$$\|e_k - e_i\|^2_{i\neq k} = \langle e_k - e_i, e_k - e_i\rangle = \langle e_k, e_k\rangle - \langle e_k, e_i\rangle - \langle e_i, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle$$

$$= \langle e_k, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle = 2$$

$$\Rightarrow \|e_k - e_i\| \not\longrightarrow 0 \qquad i, k \to \infty$$

نلاحظ بأن (e_k) ليست كوشي بالتالي لا تتقارب من الصفر

ولا من غير الصفر أي $\lim_{n\to\infty} \|e_n - g\| \neq 0$

مبرهنة:

ليكن X فضاء منظم $\dim X < \infty$ فإن التقارب الضعيف يقتضي التقارب القوي

ملاحظة:

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في فضاء هلبرت

هو أن يكون $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, z\rangle = \langle x, z\rangle$

أياً كان z من هذا الفضاء

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تقارب متتاليات المؤثرات والدالميات:

تعريف (تقارب متتاليات المؤثرات):

ليكن X ، Y فضاءين منظمين ، ولتكن المتتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X,Y)$ أي أن:

① متقاربة بانتظام: اذا كانت (T_n) متقاربة من التطبيق على $B(X,Y)$ عندها يوجد مؤثر

$$T: X \longrightarrow Y$$

بحيث أن

$$\|T_n - T\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

نرمز T النهاية المنتظمة لـ (T_n)

② متقاربة بعوة: اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بعوة في Y اياً كان x من X عندها يوجد مؤثر $T: X \to Y$

بحيث

$$\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

نرمز T النهاية القوية لـ (T_n) اياً كان $x \in X$

③ متقاربة بصيغة:

اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بصيغة من Y اياً كان x من X

عندها يوجد المؤثر $T: X \to Y$

بحيث

$$|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$$

اياً كان x من X ، اياً كان f من X'

نرمز: T النهاية الصيغية لـ (T_n) على التوالي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

X , Y فضاءين منظمين ، (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية والمحدودة المعرفة على X ، و T تأثر منها في Y حينئذٍ:

(T_n) متقاربة بانتظام نحو T

$\Leftarrow$ (T_n) متقاربة بقوة نحو T

$\Leftarrow$ (T_n) متقاربة بضعف نحو T

الإثبات: (*) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو T

$$\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولنبين أن

$$\|T_n x - Tx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أياً كان $x \in X$ $\Leftarrow$

$$0 \le \|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)(x)\| \le \|T_n - T\|\,\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \|T_n x - Tx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow$ (T_n) متقاربة بقوة

(*) لكن (T_n) متقاربة بقوة نحو T

$$\|T_n x - Tx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولنبرهن أن

$$|f(T_n x) - f(Tx)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall f \in Y'$$

$$0 \le |f(T_n x) - f(Tx)| = |f(T_n x - Tx)|$$

$$\le \|f\| \cdot \|T_n x - Tx\| \Rightarrow |f(T_n x - f(Tx)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$T_n \to T$ متقاربة بالنقطة نحو (T_n)

ملاحظة:

تقارب متتاليات المؤثرات بسوة ليس بالضرورة ان يكون متقاربة بالانتظام، سنعطي مثالاً

مثال:

$$T_n : P_2 \to P_2$$

$$T_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots)$$

(n صفر)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad ; \quad x, y \in P_2$$

T_n خطي:

$$T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n x + \beta T_n y$$

يترك للطالب

T_n محدود:

$$\|T_n x\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i^2|\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

$$\sup \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|T_n\| \leq 1$$

T_n محدود $\Leftarrow$

ان (T_n) متقاربة بسوة من المؤثر الصفري لأن

$$T(x) = 0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x\| \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| = \lim_{n \to \infty} \|(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots)\| = 0$$

(n صفر)

$$\Rightarrow \lim \|T_n x - Tx\| = 0$$

حيث $Tx = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

T_n متقاربة بقوة

(*) لنبرهن ان T_n ليست متقاربة بإنتظام من T حيث

$T_x = 0$

$$\|T_n - T\| = \|T_n\|$$

لأن: $$\|T_n - T\| = \sup \frac{\|(T_n - T)x\|}{\|x\|}$$

$$= \sup \frac{\|T_n x - Tx\|}{\|x\|} = \sup \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} = \|T\|$$

$$\|T_n\| = \sup \frac{\|T_n x\|}{\|x\|}$$

$e = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \Rightarrow Tne = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

$$\geq \frac{\|Tne\|}{\|e\|} = \frac{\|e\|}{\|e\|} = 1$$

$$\|Tn\| = 1$$

بالتالي (T_n) ليست متقاربة بإنتظام

ملاحظة:

تقاربة متتاليات المؤثرات (الخطية والمحدودة) يجعلنا ليست بالضرورة ان تكون متقاربة بقوة.

مثال: $T_n : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$

$T_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$

n صفر

T_n صفي.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x \in \ell_2 : \|T_n x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$ محدود T_n

$\Rightarrow \|T_n x\| = \|x\| \Rightarrow \|T_n\| = 1$

* سنبين الآن ان T_n متقاربة بضعف من الصفر:

لكل من الدالات الخطية f على ℓ_2، تمثيل ريس

$f(x) = \langle x, z \rangle$

$\|f\| = \|z\|$

$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \langle (0,0,\dots,0,x_1,x_2,\dots), (z_1,\dots,z_n,\dots) \rangle$

$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z}_{n+i}$

* $|f(T_n x)|^2 = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z}_{n+i}\right|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\overline{z}_{n+i}|^2$

$= |z_{n+i}|^2$

حسب متراجحة كوشي شوارز

$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right) \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} |z_m|^2 = \|x\|^2 \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} |z_m|^2$

المتسلسلة الأخيرة هي باقي متسلسلة متقاربة لأن $z \in \ell_2$

فالطرف الأيمن يقترب من الصفر بالتالي

$f(T_n x) \longrightarrow 0 = f(0x)$

أي (T_n) متقاربة بضعف من الصفر

* T_n ليست متقاربة بقوة:

إذا أخذنا $x = (1,0,0,\dots)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$T_n x = (0,0,\dots,0,\overset{(n+1)}{1},0,\dots)$

$T_m x = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$

$\|T_n x - T_m x\| = (|1|^2 + |1|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0$ ($m+1$)

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست كوشي وبالتالي ليست متقاربة بقوة

المؤثرات الخطية المغلقة (مبرهنة البيان المغلق):

تعريف:

ليكن X, Y فضاءين منظمين، ولكن $T: D(T) \to Y$ مؤثراً خطياً حامته $D(T)$ مجموعة جزئية من X عندئذٍ يسمى T مؤثراً خطياً مغلقاً إذا كان بيانه

$$\{(x,y) ; x \in D(T), y = Tx\}$$

مغلقاً في الفضاء المنظم $X \times Y$ حيث نعرف العمليتان الجبريتان للفضاء الجزئي في $X \times Y$ بالطريقة المألوفة أي أن:

* $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$
* $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

(α عدد) وحيث نعرف النظيم على $X \times Y$ بالعلاقة:

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: [التطبيق المفتوح]

ليكن X ، Y فضاءين متريين عندئذ يسمى التطبيق

$T: D(T) \longrightarrow Y$

الذي ساحته جزء من X تطبيقاً مفتوحاً إذا كانت صورة أي مجموعة مفتوحة من $D(T)$ مجموعة مفتوحة من Y

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z