كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : ٣+٤+٥+٦+٧ /نظري/
١+٢+٣+٤+٥ عملي

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

2025 / 5 / 14

المحاضرة الثالثة

ملاحظة:

اذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر على المنطقة المحدودة R إذا اخذنا

$$L = \sup_{(t,x)\in R} \left\| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right\|$$

$x \in \mathbb{R}$

$f(t,x_2) - f(t,x_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right)(x_2 - x_1)$

$f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$ نظرية القيمة الوسطى

$$\| f(t,x_2) - f(t,x_1) \| \le L \|x_2 - x_1\|$$

مثال:

$x' = x^{\frac{1}{3}}$

$x(0) = 0$

$(t_0, x_0) = (0,0) \in \mathbb{R}$

اذا ما تحددت المنطقة R نأخذ الجوار لـ (t_0, x_0)

الحل

$f(t,x) = x^{1/3}$ مستمر R

[منطقة معرفة في جوار t_0 , x_0]

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

غير معرف عند $x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3x^{2/3}} \ne 0$

$R = \{(t,x) ; |t| \le a , \|x\| \le b\}$

$$\frac{f(t,x_1) - f(t,x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{\frac{1}{3}} - x_2^{\frac{1}{3}}}{x_1 - x_2}$$

نأخذ $x_1 > 0$; $x_2 = 0$ &

$= \frac{x_1^{\frac{1}{3}}}{x_1} = x_1^{-\frac{2}{3}}$

عندما $x_1 \to 0$

$$\left\| \frac{f(t,x_1) - f(t,x_2)}{\|x_1 - x_2\|} \right\| \to \infty$$

وبالتالي لا يوجد ثابت يحقق التراجح اي انه وجدت نقطتين (t,x_1) , $(t,0)$ بحيث f لا تحقق شرط ليبشيز

تحديد الحل , الحل الأعظمي:

ليكن $f(t,x)$ دالة تحقق شروط نظرية الوجود والوحدانية على منطقة $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

t بدل x

حسب النظرية فإنه يوجد اجل كل نقطة $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ يوجد حل $\phi(t)$ معرف على جوار الـ t_0 ندرس امكانية توسيع هذا الجوار الى اكبر

نتيجة: يمكن استبدال شرط ليبشتز في نظرية الوجود والوحدانية بشكل أعم وهو كون $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر في المنطقة المحدودة

مجال مفتوح (اكبر مثية محكمة لـ h)

تعريف :

ليكن $\psi(t)$ حل معرف على مجال I

$\phi(t)$ حل معرف على مجال J

$I \subset J$

يسمى $\phi(t)$ تمديداً للحل $\psi(t)$

اذا تحقق :

$$\forall t \in I ; \psi(t) = \phi(t)$$

تعريف :

نقول عن الحل انه غير قابل للتمديد وشامل (حل اعظمي) اذا انطبق اي تمديد له عليه اي :

$IR \supset I_1$

$IR \supset I_2$

حيث $I_1 \subset I_2$ نقول عن الحل (ϕ, I_1) انه اعظمي

في I_2 اذا لم يقبل اي تمديد (ϕ^*, I^*) بحيث

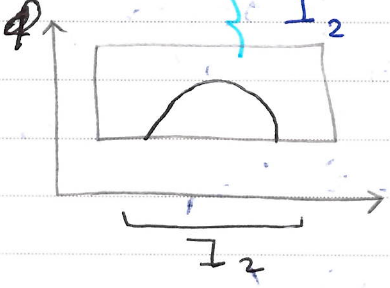
$I_1 \subset I^* \subset I_2$

نظرية :

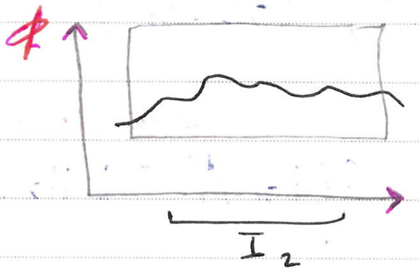
من اجل كل $(t_0, x_0) \in IR$ يوجد حل اعظمي وحيد لمسألة كوشي (مسألة القيم الابتدائية)

تعريف :

نقول عن الحل (ϕ, I_1) انه حل شامل على I_2 حيث $[I_1 \subset I_2]$ اذا كان ϕ تقبل تمديد ϕ^* على كامل المجال I_2



ϕ حل اعظمي



ϕ حل اعظمي

مثال : $x' = -2tx^2$ على IR

الحل : $x' x^2 = -2t$

بالتكامل

$$x^{-1} = t^2 + C$$

للسهولة

$$x^{-1} = t^2 - C$$

$$x = \frac{1}{t^2 - C}$$

الحل متعلق بالثابت C :

① $C > 0$

الحل معرف على

$]-\infty, -\sqrt{C}[\cup]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[\cup]\sqrt{C}, +\infty[$

الحل أعظمي وليس شامل

② $C = 0$ الحل أعظمي على $\mathbb{R}^*$ وليس شامل

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

③ $C < 0$ الحل شامل على $\mathbb{R}$ كامل

صحيح الفتح مسموحة

نظرية : (الشمولية)

نفرض $f(t, x)$ مستمر من اجل $x \in \mathbb{R}^n$, $t_1 < t < t_2$

ونفرض انه يوجد تابع $\phi(t)$ يحقق :

a ϕ, ϕ' توابع مستمرة على المجال I المحتوى في $t_1 < t < t_2$

b $\phi' = f(t, \phi(t))$ في I

عندها إما :

① يمكن تمديد $\phi(t)$ على كامل المجال $t_1 < t < t_2$ كحل للمعادلة $x' = f(t, x)$

أو إما

② $\lim_{t \to \tau} \|\phi(t)\| = \infty$

من اجل قيمة معينة τ في المجال $t_1 < t < t_2$

نظرية (التعلق المستمر بالحل للقيم الابتدائية) :

نفرض f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ توابع مستمرة ومحدودة على منطقة R ، وليكن $\phi(t_0, x_0)$ هو حل لمسألة كوشي يحقق (t_0, x_0) ، وليكن $\psi(t_0^*, x_0^*)$ هو حل لمسألة كوشي المار من (t_0^*, x_0^*) ، لنفرض ان ψ و ϕ توابع موجودة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ عندها :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 ;$

$|t - t^*| < \delta , \|x_0 - x_0^*\| < \delta$

$\Rightarrow \|\phi(t) - \psi(t^*)\| < \varepsilon$

$; \forall t, t^* \in I$

$I = (\tau_1, \tau_2) \subset \mathbb{R}$

البرهان:

سنستخدم من اجل البرهان على مبرهنة عزونوال

هام جدا

اذا كان: [

① $g(t)$ مستمر على $t_2 \le t \le t_1$

② من اجل $t_0 \le t \le t_1$ ، $g(t)$ يحقق

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

عندها

$$0 \le g(t) \le K e^{L(t-t_0)}$$

من اجل $t_0 \le t \le t_1$ [

ϕ_{t_0,x_0} حل مار من (t_0,x_0) حسب مبرهنة عزونوال

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$$

$\psi(t_0^*,x_0^*)$ حلا مار من (t_0^*,x_0^*)

$$\psi(t) = x_0^* + \int_{t_0^*}^{t} f(s,\psi(s))\,ds$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds = \int_{t_0}^{t_0^*} f(s,\phi(s))\,ds + \int_{t_0^*}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$$

$$\|\phi(t)-\psi(t)\| \le \|x_0 - x_0^*\| + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0^*} \|f(s,\phi(s))\|\,ds}_{M|t_0^*-t_0|} + \int_{t_0^*}^{t} \|f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))\|\,ds$$

$$\le \delta + M\delta + L\int_{t_0^*}^{t} \|\phi(s)-\psi(s)\|\,ds$$

$$= \delta(1+M) + L\int_{t_0^*}^{t} \|\phi(s)-\psi(s)\|\,ds$$

$$0 \le g(t) = \|\phi(t)-\psi(t)\|$$

$$\le \delta(1+M)\, e^{L(t-t_0^*)}$$

$$\le \delta(1+M)\, e^{L(T_2-T_1)}$$

$$\|\psi(t)-\psi(t^*)\| = \left\| \int_{t_0^*}^{t} f(s,\psi(s))\,ds - \int_{t_0^*}^{t^*} f(s,\psi(s))\,ds \right\|$$

عملي

المحاضرة الأولى

السؤال الأول :

اثبت ان الدالة $f(t,x) = t x^2$

تحقق شرط ليبشتز

أ- على المستطيل

$R_1 = \{(t,x) ; |t| \le 1, |x| \le 1\}$

$R_2 = \{(t,x) ; |t| \le 1, |x| < \infty\}$

الحل : $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}$

$; |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$

١ على $\mathbb{R}_1$

$\forall (t,x_1), (t,x_2) \in R_1$

$|f(t,x_1) - f(t,x_2)|$

$= |t x_1^2 - t x_2^2| = |t| \cdot |x_1^2 - x_2^2|$

$= |t| |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2|$

$\le |t| (|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2|$

$|t| \le 1$ & $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1 \Rightarrow |x_1| + |x_2| \le 2$

$$= \left\| \int_{t^*}^{t} f(s, \psi(s)) ds \right\|$$

$$\le M |t - t^*| \le M\delta$$

$$\phi(t) - \psi(t^*) = \phi(t) - \psi(t) + \psi(t) - \psi(t^*) \quad (*)$$

$$\| \phi(t) - \psi(t^*) \| \le \delta \left((1+M) e^{L(T_2 - T_1)} + M \right)$$

نختار δ بحيث يكون :

$$\delta < \frac{\varepsilon}{(1+M) e^{L(T_2 - T_1)} + M}$$

$$\Rightarrow \| \phi(t) - \psi(t^*) \| < \varepsilon$$

تعريف :

نقول عن مسألة قيم ابتدائية انها معرفة جيداً اذا كان الحل موجود ووحيد ومتعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية

$$\Rightarrow |f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le 1\times 2|x_1-x_2|$$

$$\le 2|x_1-x_2|$$

وبالتالي شرط ليبشتز محقق

والثابت $L=2$

② على $\mathbb{R}_2$

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le |t|\,(|x_1|+|x_2|)\,.\,|x_1-x_2|$$

في حالة $x_1 \to \infty$
$x_2 \to \infty$

شرط ليبشتز غير محقق

* السؤال الثاني :

اثبت ان الدالة $f(t,x)=\dfrac{1}{x}$

تحقق شرط ليبشتز

$$R_1=\{(t,x)\,;\,|t|\le 1\,;\,1\le|x|<\infty\}$$

$$R_2=\{(t,x)\,;\,|t|\le 1\,;\,|x|\le 1\}$$

الحل :

① على R_1

$$\forall\,(t,x_1),(t,x_2)\in R_1$$

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|$$

$$=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_2-x_1}{x_1.x_2}\right|$$

$$=\frac{1}{|x_1|.|x_2|}\,.\,|x_1-x_2|$$

$$1\le|x|<\infty$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{|x_1|}<1 \qquad \left\{\Rightarrow 0<\frac{1}{|x_1.x_2|}<1\right.$$

$$0<\frac{1}{|x_2|}<1$$

$$\Rightarrow |f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le 1.|x_1-x_2|$$

شرط ليبشتز محقق

$$L=1$$

② على R_2

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|=\frac{1}{|x_1|.|x_2|}|x_1-x_2|\to\infty$$

عندما $x_1\to 0$ او $x_2\to 0$

اي شرط ليبتشز غير محقق

* السؤال الثالث:

هو المعادلة $x''+x^2=1$ إلى
حله معادلات تفاضلية ثم
تحقق من وجود ثابت كيف شرط
ليبتشز على المنطقة

$R=\{(t,x_1,x_2)\ ;\ |t|\le a,\ |x_1|\le b,\ |x_2|\le c\}$

$f-f\le L\left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right|=L\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

الحل: نفرض $\begin{cases}x_1=x\\x_2=x'\end{cases}$

$x_1'=x'=x_2$

$x_2'=x''=1-x^2=1-x_1^2$

$f(t,x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_2\to x'\\1-x_1^2\to x''\end{pmatrix}$

$\forall\ (t,x_1,x_2)\ (t,y_1,y_2)\in R$

$|f(t,x_1,x_2)-f(t,y_1,y_2)|$

$=\left\|\begin{pmatrix}x_2\\1-x_1^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_2\\1-y_1^2\end{pmatrix}\right\|$

$=\left\|\begin{pmatrix}x_2-y_2\\y_1^2-x_1^2\end{pmatrix}\right\|$

$=\sqrt{(x_2-y_2)^2+(y_1^2-x_1^2)^2}$

$=\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2(x_1+y_1)^2}$

$\le\sqrt{(x_2-y_2)^2+(\underbrace{\|x_1\|}_{\le b}+\underbrace{\|y_1\|}_{\le b})^2(x_1-y_1)^2}$ $(b+b=2b)^2$

$\le\sqrt{(x_2-y_2)^2+4b^2(x_1-y_1)^2}$

$\le\sqrt{L^2(x_2-y_2)^2+L^2(x_1-y_1)^2}$

$\le L\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}$

$\le L|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)|$

$L=\max\{1,4b^2\}$

شرط ليبتشز محقق

* السؤال الرابع:

1 استخدم طريقة بيكارد لحل
مسألة القيم الابتدائية

$x'=-x=f(t,x)$ $x(0)=1$

الحل: نتحقق من شرط ليبتشز] تحقق
المعادلة لها حل وحيد

$x_m=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_{m-1})\,ds$

$x_1=x_0+\int_0^t -x_0\,ds=1+\int_0^t(-1)\,ds$

$=1-t$

$x' = -x$ الحل الدقيق :
بطريقة فصل المتغيرات :

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt$$

بالتكامل

$$\Rightarrow x = ce^{-t}$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow x = e^{-t}$$

* السؤال الخامس :

استخدم طريقة بيكارد لحل مسألة القيم الابتدائية

$$x' = tx = f(t,x)$$

$$x(0) = 1$$

الحل :

$$x_m = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{m-1})\,ds$$

$$x_1 = x_0 + \int_0^t f(s, x_0)\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t s x_0\,ds = 1 + \int_0^t s\,ds$$

$$= 1 + \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = 1 + \frac{t^2}{2}$$

$$x_2 = x_0 + \int_0^t (-1+s)\,ds = 1 + \left[-s + \frac{s^2}{2}\right]_0^t$$

$$= 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_3 = x_0 + \int_0^t \left(-1 + s - \frac{s^2}{2}\right) ds$$

$$= 1 + \left[-s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!}\right]_0^t$$

$$= 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}$$

$$x_4 = x_0 + \int_0^t \left(-1 + s - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!}\right) ds$$

$$= 1 + \left[-s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!}\right]_0^t$$

$$= 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$x_n = 1 - t + \frac{(-t)^2}{2!} + \dots \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-t)^n}{n!}$$

$$\lim_{x_n \to \infty} e^{-t} = e^{-t}$$

2025 / 5 / 21

المحاضرة الرابعة

الجمل التفاضلية الخطية: للمصفوفات

$I \subset \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R}^n$

فضاء التطبيقات الخطية $\mathcal{L}(E)$

المستمرة $E \to E$

E هو النظيم $\| \ \|$

$$\forall\, L \in \mathcal{L}(E) \ ; \ |||L||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\|x\| \le 1} \|L(x)\|$$

$$x_1' = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)$$

$$\{x' = A(t)x(t) + b(t)\} \quad (1)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة $n \times n$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

a_{nm} ← سطر ← عامود

$$x_2 = x_0 + \int_0^t s x_1 \, ds = 1 + \int_0^t s\left(1 + \frac{s^2}{2}\right) ds$$

$$= 1 + \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8}\right]_0^t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}$$

$$x_3 = 1 + \int_0^t s x_2 \, ds = 1 + \int_0^t s + \frac{s^3}{2} + \frac{s^5}{8} \, ds$$

$$= 1 + \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8} + \frac{s^6}{48}\right]_0^t$$

$$= 1 + \left[\frac{s^2}{2} + \frac{\left(\frac{s^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{s^2}{2}\right)^3}{3!}\right]_0^t$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!}$$

$$x_n = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!}$$

$$x = \lim x^n = e^{\frac{t^2}{2}}$$

الحل الدقيق:

$$x' = tx \Rightarrow \frac{dx}{x} = t\,dt$$

$$\ln x = \frac{t^2}{2} + \ln c$$

$$x = c e^{\frac{t^2}{2}} \qquad x(0) = 1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{t^2}{2}}$$

انتهت المحاضرة

$$A : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$x(t), b(t) \in \mathbb{R}^n$

$$B : I \longrightarrow E$$

$$\{x'(t) = A(t)\, x(t)\} \ (2) \Leftarrow b(t) = 0$$

يكون $x(t)$ الحل العام للجملة (1) اذا وفقط اذا كتب على شكل مجموع $x(h) + x(p)$

نظرية الوجود والوحدانية لمسائل المعادلات التفاضلية الخطية :

$$x'(t) = A(t)\, x(t) + B(t)$$

نفرض $A(t)$ و $B(t)$ عبارة عن مصفوفات تابعة معرفة ومستمرة على مجال I

$I(t_1, t_2)$ عندئذ فإنه من اجل كل $t_0 \in I$ & $x_0 \in E$ فإنه يوجد حل وحيد $\phi_{(t_0, x_0)}$ يعرف (t_0, x_0) معرف على كامل المجال I :

الإثبات : $f(t,x) = A(t)x(t) + B(t)$ مستمر بالتعريف

نبرهن ان f يحقق شرط ليبشتز : من اجل كل $t \in I$ & $x_1, x_2 \in E$

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| = \| A(t)(x_1 - x_2) \|$$

نضرب ونقسم على $\| x_1(t) - x_2(t) \|$

$$\Rightarrow \| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| = \frac{\| A(t)(x_1 - x_2) \| \times \| x_1(t) - x_2(t) \|}{\| x_1(t) - x_2(t) \|}$$

$$\leq \sup_{\substack{x_1, x_2 \in E \\ x_1 \neq x_2}} \left(\frac{\| A(t)(x_1 - x_2) \|}{\| x_1(t) - x_2(t) \|} \right) \| x_1(t) - x_2(t) \|$$

$$\leq \underbrace{|||A(t)|||}_{K(t)} \ \| x_1(t) - x_2(t) \|$$

$$\leq L \ \| x_1(t) - x_2(t) \|$$

$$L = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |||A(t)|||$$

وبالتالي تحقق شرط ليبشتز . بالتالي يوجد حل وحيد في جوار t_0

ملاحظة : صفة الخطية تسمح لنا بتمديد الحل الى كامل I للحصول على حل شامل

نظرية تابعة لها { ... }

عندئذ كل حل للمعادلة (1) معرف على مجال J يمكن تمديده على كامل المجال I

نفرض ϕ هو حل المعادلة (1)

$$\|\phi(t)\| \le \|\phi(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\phi(s) + B(s)\big)\,ds \right\|$$

in $\underbrace{(T_1, T_2)}_{=J} \subset \underbrace{(t_1, t_2)}_{=I}$

$$\le \|\phi(t_0)\| + \max_{T_1<t<T_2} |||A(t)||| \int_{t_0} \|\phi(s)\|\,ds + \max_{T_1<t<T_2} |||B(t)|||$$

حسب غرونوال

$$\|\phi(t)\| \le K e^{L(t-t_0)} \le K e^{L(T_2-T_1)} < \infty$$

أي الحل يبقى محدوداً على كل مجال محدود وبالتالي حسب نظرية الشمولية الحل يمكن تمديده على كامل المجال I

الجمل الخطية المتجانسة:

$$x'(t) = A(t)\,x(t)$$

حيث $A(t)$ مصفوفة مربعة عناصرها توابع مستمرة ومعرفة على IR

نظرية:

لتكن S^0 مجموعة جميع حلول المعادلة الخطية المتجانسة (2) والمعرفة على مجال $I \subset IR$

$\phi_1, \phi_2 \in S^0$

$\gamma_1, \gamma_2 \in IR$

وبالتالي $S^0 \ni \gamma_1\phi_1 + \gamma_2\phi_2$

$\gamma_1 \times \to \phi_1'(t) = A(t)\phi_1(t)$

$\gamma_2 \times \to \phi_2'(t) = A(t)\phi_2(t)$

$$\big(\gamma_1\phi_1(t) + \gamma_2\phi_2(t)\big)' = A(t)\big(\gamma_1\phi_1(t) + \gamma_2\phi_2(t)\big)$$

أي تركيب خطي لجملة متجانسة هو حل

مبرهنة:

إذا كانت $A(t)$ معرفة ومستمرة على I عندئذ S^0 فضاء شعاعي معرف فوق IR ذو بعد n

الإثبات:

لتكن $t_0 \in I$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ تمثل القاعدة القانونية لـ IR^n

ولتكن ϕ_i حل المعادلة (2) الذي يحقق $\phi_i(t_0) = e_i$

حلول أساسية

نأخذ تركيب خطي: $c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_n$ هو أيضاً حل للجملة (2)

لتكن $\phi(t) \in IR^n$ حل كيفي لـ f في قاعدة قانونية $\{e_i\}$ IR^n

$$\phi(t) = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n$$

$$\phi(t_0) = c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) + \dots + c_n\phi_n(t_0)$$

لدينا $\phi(t)$ و $c_1\phi_1+\dots+c_n\phi_n$

حلان يمران من نفس النقطة t_0 و

بالتالي حسب نظرية الوجود و

الوحدانية ينطبق الحلان وبالتالي:

$\phi(t)=c_1\phi_1+\dots+c_n\phi_n$ على كامل I

نبرهن ان $\phi_1,\dots,\phi_n$ مستقلة خطياً:

$$c_1\phi_1+c_2\phi_2+\dots+c_n\phi_n\equiv 0$$

نبرهن ان $c_1=c_2=\dots=c_n=0$

عند النقطة t_0

$$c_1\phi_1(t_0)+c_2\phi_2(t_0)+\dots+c_n\phi_n(t_0)=0$$

$$c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n=0$$

وبما ان $e_1,\dots,e_n$ قاعدة

وبالتالي $c_1=c_2=\dots=c_n=0$

معرفة n حل مستقلة خطياً لـ (2) على مجال I يسمح بحل اي مسألة قيمة ابتدائية متعلقة بـ (2)

تعريف:

نقول عن مجموعة مؤلفة من n حل للمعادلة المتجانسة مستقل خطيا $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n$ بمجموعة حلول اساسية على I

$\phi_i \in \mathbb{R}^n \,;\, i=1,\dots,n$

مصفوفة الحلول والمصفوفة الأساسية:

$\det\phi\neq0$

نقول عن مصفوفة التوابع $t\to\phi(t)$ التي هي $n\times n$ معرفة على مجال I انها مصفوفة حلول للمعادلة المتجانسة (2) اذا كان كل عمود من اعمدتها هو حل للمعادلة (2):

$$\phi'(t)=A(t)\phi(t) \quad (3)$$

تسمى مصفوفة الحلول $I\to\phi(t)$ مصفوفة أساسية اذا كانت اعمدتها تشكل ~~مصفوفة~~ مجموعة الحلول الأساسية

نقول عن المصفوفة الأساسية انها مصفوفة اساسية رئيسية اذا كانت المحددتا

$$\phi(t_0)=1$$

مصفوفة الواحدة

نتيجة: هام

اذا كانت $\phi(t)$ مصفوفة اساسية فإنه من اجل كل حل d للمعادلة (2) ، $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$

$$d=c_1\phi_1+c_2\phi_2+\dots+c_n\phi_n$$

$$=\phi(t)\,c^T$$

من اجل [illegible]

نظرية:

لتكن $A(t)$ مصفوفة مربعة تابعية $n\times n$ مستمرة على I ولتكن $\phi(t)$ مصفوفة مربعة $n\times n$ بحيث ان

$$\phi'(t) = A(t)\,\phi(t)$$

على I عندئذ

$$(\det\phi)' = (tr\,A(t))\det\phi(t)$$

مجموع عناصر القطر الرئيسي

$$\det\phi(t) = \det\phi(\tau)\exp\int_{\tau}^{t} tr\,A(s)\,ds$$

$$tr\,A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$$

نظرية 1:

اذا كان رونسكيان لمجموعة التوابع الشعاعية $\phi_1,\dots,\phi_n$ مختلف عن الصفر من اجل نقطة واحدة على الأقل t_0 من I عندئذ تكون هذه التوابع مستقلة خطياً

نظرية 2:

اذا كانت $\phi_1,\dots,\phi_n$ حلول مستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة فان محدد $\det|\phi_1,\dots,\phi_n|$ لايساوي الصفر من اجل كل $t\in I$

$$\det(\phi_1,\dots,\phi_n)\neq 0 \quad t\in I$$

نظرية 3: (صيغة أ.ل) هام

الشرط اللازم والكافي لكي تكون مصفوفة الحلول (3) هي مصفوفة اساسية هو ان يكون محدد هذه المصفوفة لايساوي الصفر ولو في نقطة واحدة

اي يوجد $t_0\in I$ بحيث

$$\det\phi(t_0)\neq 0$$

$\phi(t)$ مصفوفة اساسية $\Leftrightarrow$ للجملة (2)

انتهت المحاضرة

المصفوفات المتشابهة عن مسودة دوبجعقلوب

المحاضرة الخامسة

مبرهنة :

اذا كانت ϕ مصفوفة اساسية للجملة المتجانسة ولتكن $C \neq 0$ [مصفوفة ثوابت] ليست الصفرية $M_n(\mathbb{R})$

1. عندما ϕC هي مصفوفة اساسية ايضاً للجملة المتجانسة
2. واذا كانت ψ مصفوفة اساسية أخرى للجملة المتجانسة عندها يوجد مصفوفة $C \neq 0$ بحيث يكون $\psi = \phi C$

ملاحظة :

ان ليس بالضرورة ان تكون ϕ C مصفوفة أساسية

الإثبات :

1. $\det(\phi C) \overset{??}{\neq} 0$

$$\det(\phi C) = \underbrace{\det \phi}_{\neq 0 \text{ لأن } \phi \text{ اساسية}} \cdot \underbrace{\det C}_{\neq 0}$$

$$(\phi(t)\, C)' = \phi'(t) \cdot C$$

اساسية تحقق الشروط

$$= A\, \phi(t)\, C$$

2. $\exists C \ ; \ \psi = \phi C$

$$\phi^{-1} \psi = C$$

$$(\phi^{-1} \psi)' = (\phi^{-1})' \psi + \phi^{-1} \psi'$$

$$\phi \cdot \phi^{-1} = 1$$

$$\phi' \phi^{-1} + \phi (\phi^{-1})' = 0$$

$$(\phi^{-1})' = -\phi^{-1} \phi' \phi^{-1}$$

$$(\phi^{-1} \psi)' = -\phi^{-1} \underbrace{\phi'}_{A\phi} \phi^{-1} \psi + \phi^{-1} \underbrace{\psi'}_{A\psi}$$

$$= 0$$

$$\phi^{-1} \psi = C \Rightarrow \psi = \phi C$$

المصفوفة الحالة (مصفوفة كوشي)

النواة الحالة :

نفرض $\phi(t)$ مصفوفة اساسية للجملة المتجانسة على المجال I حسب تعريف المصفوفة الأساسية

$$\det \phi(t_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\phi^{-1}(t_0)$ موجود دائماً

$$\boxed{K(t, t_0) = \phi(t)\, \phi^{-1}(t_0)}$$

هي مصفوفة اساسية رئيسية لأن :

$\phi^{-1}(t_0)$ مصفوفة ثوابت $n \times n$

حسب $K(t, t_0)$ مصفوفة اساسية

تحقق: $K(t_0, t_0) = \phi(t_0)\phi^{-1}(t_0) = I$ 1

حل مسألة كوشي للجملة المتجانسة:

$$(1)\quad \begin{cases} x' = A(t)\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \phi(t)\, C^T$$

$$x(t_0) = \phi(t_0)\, C^T = x_0$$

$$\Rightarrow C^T = \phi^{-1}(t_0)\, x_0$$

مهم

$$\boxed{x(t) = \phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)\, x_0}$$

$$\boxed{x(t) = K(t, t_0)\, x_0}$$

حل للجملة غير المتجانسة:

مصفوفة مستمرة

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)$$

$A(t)$ مصفوفة مربعة $n \times n$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ \& \ B(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نظرية:

لتكن $\phi(t)$ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة $x'(t) = A(t)x(t)$

ولتكن $t_0 \in I$ و $x_0 \in E$ هو الشرط الابتدائي عندئذ فإن حل مسألة كوشي للجملة غير المتجانسة

$$(2)\quad \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

يعطى بالعلاقة: $t \in I$

$$(3)\quad x(t) = \phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)\,x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds$$

مهم

$$x(t) = K(t, t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\,B(s)\,ds$$

الإثبات:

نشتق العلاقة (3)

$$x'(t) = \phi'(t)\,\phi^{-1}(t_0)\,x_0 + \phi'(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds + \phi(t)\,\phi^{-1}(t)\,B(t)$$

$$= A(t)\,\phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)\,x_0 + A(t)\,\phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\,B(s)\,ds + B(t)$$

$$= A(t)\left[\phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)\,ds\right] + B(t) = A(t)x(t)+B(t)$$

هو حل وحيد لأنه يحقق شروط نظرية الوجود والوحدانية لأن مصفوفات $A(t)$ ، $B(t)$ مستمرة.

نعلم ان حل الجملة الخطية غير المتجانسة يعطى على شكل $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

نعرف ان $\phi(t)$ مصفوفة اساسية للجملة المتجانسة

$$x_h(t)=\phi(t)\,c^T=\phi(t)\cdot c_1$$

نوجد حل خاص للجملة غير متجانسة حسب لاغرانج [طريقة تغير الثابت]

نفرض ان للجملة حل خاص x_p بشكل $x_p(t)=\phi(t)c_1(t)$

$$x_p'(t)=\phi'(t)c_1(t)+\phi(t)c_1'(t)$$

$$\underbrace{\phi'(t)}_{A(t)\phi(t)}c_1(t)+\phi(t)c_1'(t)=A(t)\phi(t)c(t)+B(t)$$

$$\phi(t)c_1'(t)=B(t)$$

$$c_1'(t)=\phi^{-1}(t)B(t)$$

$$\Rightarrow c_1(t)=\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

$$x(t)=\phi(t)c_1+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

$$x_0=x(t_0)=\phi(t_0)c_1+0$$

$$c_1=\phi^{-1}(t_0)x_0$$

$$x(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

مهم!!

ملاحظة:

اذا كان d_1, d_2 حلان للجملة غير المتجانسة فان d_1-d_2 هو حل للجملة المتجانسة ، وبالتالي يوجد $c\in\mathbb{R}^n$ بحيث يكون

$$d_1-d_2=\phi(t)\,c^T$$

$$\forall t\in I$$

الإثبات:

d_1 حل لغير المتجانسة

$$d_1' = A(t)\,d_1(t) + B(t)$$

d_2 حل لغير المتجانسة

$$d_2' = A(t)\,d_2(t) + B(t)$$

$$d_1' - d_2' = A(t)\left(d_1(t) - d_2(t)\right)$$

$d_1 - d_2$ تحقق الجملة المتجانسة.

الجملة الخطية ذات الأمثال الثابتة:

لتكن لدينا الجملة الخطية ذات الأمثال الثابتة بالشكل:

$$x'(t) = A x(t) + B(t) \qquad (4)$$

$$t \in I$$

A مصفوفة مربعة $n \times n$

تعريف [التابع الأسي المصفوفي]:

التابع الأسي المصفوفي e^A حيث A مصفوفة ثوابت

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

1 مصفوفة الواحدة $n \times n$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

e^{At} هي مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة

$$x'(t) = A x(t) \quad \dots (5)$$

الإثبات:

$$\left(e^{At}\right)' = A e^{At}$$

$$\phi'(t) = A \phi(t)$$

$$\det e^{At} \neq 0$$

نتيجة:

بفرض لدينا المسألة (4) مزودة بالشرط الابتدائي $x(t_0) = x_0$

$t_0 \in I$

$x_0 \in E$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds$$

$$K(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$$K(t_0, t_0) = 1$$

مصفوفة أسية واحدية

الصفوفة الواحدية $I = 1$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)}{2!}\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \dots + (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{t^{2k}}{2k!}$$

$$+ (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \dots & + t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} \dots & +1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds = \dots$$

مثال:

$$x'(t) = A x(t) + b(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

الحل:

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\, 1$$

$$A^3 = A^2.A = (-1)A$$

$$A^4 = A^2.A^2 = 1$$

$$A^5 = A$$

$$A^6 = A^2 = (-1)\, 1$$

مثال: $x'(t) = Ax(t)$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & e^{-3t}t^2 \\ 0 & e^{-3t} & t\,e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

تحقق انها أساسية ثم أوجد الحل:

الحل باختصار حليتو الدكتورة

$\det \phi(t) \neq 0$

$\phi'(t) = A\phi(t)$

لازم تساوي $\phi'(t) = \dots$

$A\phi(t) = \dots$

للحل نحتاج مقلوب $\phi^{-1}(t)$

وظيفة:

$$A \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

التتمة في المحاضرة

السؤال الأول : هام

حول المعادلة التالية الى جملة معادلات خطية من المرتبة الأولى ثم حل مسألة القيم الابتدائية الموافقة للشروط الابتدائية :

$$x'' + x = 0 \qquad x(0) = 0 \;;\; x'(0) = 1$$

الحل: نفرض $x_1 = x$ & $x_2 = x'$

$$\Rightarrow x_1' = x' = x_2$$

$$\Rightarrow x_2' = x'' = -x = -x_1$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = f_1 & x_1(0) = 0 \\ x_2' = -x_1 = f_2 & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_i^{(m)} = x_i^{0} + \int_{t_0}^{t} f_i(s, x_1^{(m-1)}, x_2^{(m-1)})\, ds$$

* $$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \int_0^t f_1(s, x_1^0, x_2^0)\, ds = 0 + \int_0^t x_2^0\, ds$$

$$= 0 + \int_0^t 1\, ds = [s]_0^t = t$$

* $$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \int_0^t f_2(s, x_1^0, x_2^0)\, ds = 1 + \int_0^t -x_1^{(0)}\, ds$$

$$= 1 + \int_0^t 0\, ds = 1$$

* $x_1^{(2)} = x_1^{(0)} + \int_0^t f_1(s, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})\, ds = 0 + \int_0^t x_2^{(1)}\, ds$

$= \int_0^t 1\, ds = t$

* $x_2^{(2)} = x_2^{(0)} + \int_0^t f_2\, ds = 1 + \int_0^t (-x_1^{(1)})\, ds$

$= 1 + \int_0^t (-s)\, ds = 1 - \frac{t^2}{2}$

* $x_1^{(3)} = x_1^{(0)} + \int_0^t f_1(s, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})\, ds$

$= 0 + \int_0^t x_2^{(2)}\, ds = \int_0^t (1 - \frac{s^2}{2})\, ds = t - \frac{t^3}{3!}$

* $x_2^{(3)} = x_1^{(0)} + \int_0^t f_2\, ds = 1 + \int_0^t (-x_1^{(2)})\, ds$

$= 1 + \int_0^t (-s)\, ds = 1 - \frac{t^2}{2}$

$\vdots$

$$x_1^{(n)} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \boxed{\sin t = x_1 = x}$$

$$x_2^{(n)} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \cos t = x' = x_2$$

الحل حسب معادلات (2) يكون كالتالي:

$$m^2+1=0 \Rightarrow m=\mp i$$

$$\Rightarrow x = c_1\cos t + c_2\sin t$$

$$x(0)=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$\Rightarrow x = c_2\sin t$$

$$x' = c_2\cos t \Rightarrow x'(0)=1$$

$$\Rightarrow c_2 = 1$$

وبالتالي

$$\boxed{x=\sin t}$$

السؤال الثاني:

أدرس وجود وحدانية الحل لمسألة القيم الابتدائية التالية

$x(t_0)=0$ & $x' = 2x^{2/3}$

الحل:

$f(x,t)=2x^{\frac{2}{3}}$ مستمرة على $\mathbb{R}$

في المعادلة حل

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

غير مستمر عند $x=0$ في

لا يمكن ان نضمن وحدانية الحل

الحل بطريقة منفصلة المتغيرات:

$$\frac{dx}{dt} = 2x^{\frac{2}{3}}$$

$$x^{-\frac{2}{3}}dx = 2dt$$

$$3x^{\frac{1}{3}} = 2t + c$$

$$x(t_0)=0 \Rightarrow 0 = 2t_0 + c$$

$$3x^{\frac{1}{3}} = 2(t-t_0)$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(t-t_0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{27}(t-t_0)^3$$

حل وحيد

السؤال الثالث:

ادرس وجود وحدانية الحل لمسألة القيم الابتدائية $x' = \frac{x}{t}$

في الحالات التالية:

1. $x(0)=0$
2. $x(0)=1$
3. $x(1)=0$

ثم حدد منطقة يكون فيها الحل وحيد

الحل: $f(x,t)=\frac{x}{t}$ غير مستمر عند $t=0$ وبالتالي لا يمكن معرفة شيء عن الوجود والوحدانية

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln t + \ln c$$

$$[\, x = t\,c \,]$$

① $x(0)=0 \Rightarrow 0 = c(0) \Rightarrow 0=0$

للمعادلة عدد لانهائي من الحلول $\Leftarrow$

② $x(0)=1 \Rightarrow 1 = c(0) \Rightarrow 1=0$

المعادلة مستحيلة الحل

③ $x(1)=0 \Rightarrow 0 = c(1) \Rightarrow c=0$

$\Rightarrow x=0$ [الحل الصفري]

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{t}$ و $f(x,t)=\frac{x}{t}$

مستمرين في جوار يحوي $t=1$ ولا يحوي $t=0$

إذن الحل موجود ووحيد

لأن المنطقة بين الـ 0 و 1 هي 1

$$R=\{(t,x),\ |t-1|<a<1,\ |x-0|<b\}$$

السؤال الرابع:

ندرس وجود ووحدانية الحل للمسألة القيم الابتدائية التالية:

$$x' = -x+t+1$$
$$x(1)=2$$

الحل:

يتم الحل بطريقة عامل التكامل μ

$f(t,x)=-x+t+1$ مستمر } الحل موجود

$\frac{\partial f}{\partial x}=-1+t$ مستمر } ووحيد

$$x'+x=t+1$$

$$\mu = e^{\int p(t)dt} = e^{t}$$

$p(x)=1$
$q(x)=t-1$

$$x=\frac{1}{\mu}\left[c+\int \mu q\, dt\right]$$

$$x=e^{-t}\left[c+\int (t+1)e^{t}\, dt\right]$$

تكامل بالتجزئة

$u=t+1$ $\quad dv=e^{t}dt$
$du=1$ $\quad v=e^{t}$

$x = e^{-t}[c + te^{t}]$

$= ce^{-t} + t$

$x(1) = 2 \Rightarrow 2 = ce^{-1} + 1$

$\Rightarrow ce^{-1} = 1 \Rightarrow c = e$

$x = e^{1-t} + t$

السؤال الخامس:

ادرس وجود ووحدانية الحل لمسألة القيم الابتدائية:

$$x' = \frac{x-1}{t-1}$$

في الحالات التالية:

① $x(1) = 1$

② $x(2) = 2$

حدد المنطقة التي يكون فيها الحل وحيد

الحل:

$f(t,x) = \frac{x-1}{t-1}$ غير معرف $t = 1$

[مبرهنة بيانو غير محققة]

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dt}{t-1}$$

$\Rightarrow x - 1 = (t-1)c$

$\Rightarrow x = c(t-1) + 1$

① $x(1) = 1 \Rightarrow 1 = 0 + 1$

$\Rightarrow$ عدد لانهائي من الحلول

② $x(2) = 2 \Rightarrow 2 = c + 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow x = t - 1 + 1 = t$

$R : \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 ;\ |t-2| \leq a < 1,\ |x-2| \leq b\}$

السؤال السادس:

بين ان $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$ مصفوفة أساسية للجملة $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$

ثم حل المسألة السابقة من أجل

$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t_0 = 0$

الحل:

① $\det \phi \neq 0$

② $\phi' \overset{??}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi$ محققة

$X(t) = \phi(t)\, \phi^{-1}(t_0)\, X_0$

$\det \phi(t) = e^{2t}$

$$\phi^{-1}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} e^{t} & -te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (t+1)e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = (t+1)e^{t}, \qquad y = e^{t}$$

السؤال السابع :

لتكن الجملة : $\begin{cases} x' = 3x+2y+e^{t} \\ y' = 3y+e^{-t} \end{cases}$

$y(0) = x(0) = 1$

① اثبت ان $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$ مصفوفة اساسية للجملة $X' = AX$

حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

② ثم حل مسألة القيم الإبتدائية

حيث $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $B(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

الحل:

(1) نتحقق من $\det\phi(t) \neq 0$

$\phi'(t) = A\,\phi(t)$

(2)

$$X(t) = \phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)X_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

$$\phi^{-1}(t) = e^{-6t}\begin{pmatrix} e^{3t} & -2te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-3t} & -2te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_h = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\phi^{-1}(s)B(s) = \begin{pmatrix} e^{-3s} & -2se^{-3s} \\ 0 & e^{-3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2s} - 2se^{-4s} \\ e^{-4s} \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2}e^{-2s}$

$$\Rightarrow \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} - 2se^{-4s} \\ e^{-4} \end{pmatrix}$$

تكامل بالتجزئة

$-\frac{1}{4}e^{-4s}$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} (2t+1)e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \boxed{\quad}$$

انتهت المحاضرة

عملي

المحاضرة الثالثة

نظرية كايلي هاملتون:

كل مصفوفة مربعة A تحقق معادلتها المميزة

$$\det(|A-\lambda I|) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_2\lambda^2 + b_1\lambda^1 + b_0$$

عندما:

$$b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_2A^2 + b_1A + b_0 = 0$$

نظرية 1:

اذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$

$$e^{At} = \alpha_{n-1}A^{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2}t^{n-2} + \dots + \alpha_2A^2t^2 + \alpha_1At + \alpha_0 I$$

حيث $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ هي توابع لـ t تحدد حسب المصفوفة

$n = 2$; $e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I$

$n = 3$; $e^{At} = \alpha_2 A^2t^2 + \alpha_1 At + \alpha_0 I$

نظرية 2:

لتكن A المصفوفة المربعة المعرفة في النظرية 1 ، ولنضع:

$$r(\lambda) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$r(\lambda t) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1(\lambda t) + \alpha_0$$

فإذا كانت λ_i قيمة ذاتية عندها

$$e^{\lambda_i} = r(\lambda_i)$$

إذا كانت λ_i قيمة ذاتية مكررة k مرة $[k > 1]$ عندها

$$e^{\lambda_i} = \frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i}$$

$$e^{\lambda_i} = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} r(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_i} = \frac{\partial^{(k-1)}}{\partial\lambda^{(k-1)}} r(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

(k-1) مرة

السؤال الأول:

حول المعادلة $x'' - 4x' + 4x = e^t$

$x(0) = 0 \qquad x'(0) = 1$

إلى جملة معادلتين من المرتبة الأولى ثم حل مسألة القيم الابتدائية

الحل: نفرض

$x_1 = x$

$x_2 = x'$

$$\Rightarrow x_1' = x' = x_2$$

$$x_2' = x'' = 4x' - 4x + e^t = 4x_2 - 4x_1 + e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 4x_2 - 4x_1 + e^t \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$X_1(0) = 0 \qquad X_2(0) = 1$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{2t} & te^{2t} \\ -4te^{2t} & (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\,ds$$

$$= e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s)\,ds$$

$$X_h = e^{At} X(0) = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ (1+2t)\, e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X_p = \int_0^t e^{At} \cdot e^{-As} B(s)\,ds$$

$$= e^{At} \int_0^t e^{-As} B(s)\,ds$$

$$e^{-As} B(s) = \begin{pmatrix} (1+2s)e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 4se^{-2s} & (1-2s)e^{-2s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s e^{-s} \\ (1-2s)e^{-s} \end{pmatrix}$$

بما أن A من المقا 2x2

$\Leftarrow$

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I$$

$$\det|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

مكررة

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow e^{2t} = r(2t) = \alpha_1(2t) + \alpha_0$$

$$e^{\lambda t} = \alpha_1(\lambda t) + \alpha_0$$

$$e^{\lambda t} = \frac{\partial(\alpha_1(\lambda t))}{\partial \lambda t} = \alpha_1 = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = e^{2t}$$

$$\alpha_0 = e^{2t} - 2t\alpha_1 = e^{2t} - 2t\, e^{2t}$$

$$= (1-2t)\, e^{2t}$$

$$e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot t + (1-2t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} 0 & te^{2t} \\ -4te^{2t} & 4te^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-2t)e^{2t} & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 & x_1(0)=0 \\ x_2' = -2x_2 - 5y + 3 & x_2(0)=0 \\ y' = x_2 + 2y & y(0)=1 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -5 \\ 0 & +1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

$$X_p = e^{At} \int_0^t \begin{pmatrix} -s e^{-s} \\ (1-2s) e^{-s} \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} (t-1) e^{2t} + e^{t} \\ (2t-1) e^{2t} + e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = X_h + X_p = \begin{pmatrix} (2t-1) e^{2t} + e^{t} \\ 4t e^{2t} + e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = (2t-1) e^{2t} + e^{t}$$

السؤال الثاني :

حول المعادلتين الى جملة معادلات من المرتبة الأولى ثم حل مسألة القيم الابتدائية

$$\begin{cases} x'' = -2x' - 5y + 3 \\ y' = x' + 2y \end{cases}$$

$$x(0) = 0 \qquad x'(0) = 0$$
$$y(0) = 1$$

الحل :

$$x_1 = x \Rightarrow x_1' = x' = x_2$$
$$x_2 = x' \Rightarrow x_2' = x'' = -2x_2 - 5y + 3$$

$$e^{At} = (1-\cos t)\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2+2\cos t+\sin t & -5+5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & \sin t & 2+\cos t+2\sin t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} -6t - 2 + 6\sin t + 2\cos t \\ -6 - 2\sin t + 6\cos t \\ 3 - 2\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

الكل هو :

$x_1 = x = -6t - 2 + 6\sin t + 2\cos t$

$y = 3 - 2\cos t + 2\sin t$

$$e^{\lambda t} = r(\lambda, t) = \alpha_2(\lambda t)^2 + \alpha_1(\lambda t) + \alpha_0$$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow 1 = \alpha_0$

$\lambda_2 = i \Rightarrow e^{it} = -\alpha_2 t^2 + \alpha_1 i t + 1$

$\lambda_3 = -i \Rightarrow e^{-it} = -\alpha_2 t^2 - \alpha_1 i t + 1$

بالكل المشترك بذات :

$$e^{it} + e^{-it} = -2\alpha_2 t^2 + 2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{e^{it} + e^{-it} - 2}{-2t^2} = -\frac{\cos t}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$e^{it} - e^{-it} = 2\alpha_1 i t$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}$$

$$e^{At} = \frac{(1-\cos t)}{t^2} A^2 t^2 + \frac{\sin t}{t} A t + 1I$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2025/6/18

المحاضرة السادسة

تعريف :

نفرض لدينا : $x' = f(t,x)$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

نفرض ان f مستمر ويحقق شرط ليبشتز وإذا كان $d(t)$ حل المعادلة التفاضلية بشرط ابتدائي $d(t_0)$ ، $t_0 < t$:

الحل نرمزله بالشكل : نقول ان : $d(t, t_0, d_0)$

① نقول ان $d(t)$ مستقر حسب ليابونوف اذا كان :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta_\varepsilon > 0$;

متعلق بـ ε

من اجل كل $x(t)$ للمعادلة التفاضلية بشرط ابتدائي $x(t_0)$ بحيث $\|x(t_0) - d(t_0)\| < \delta$

فإن :

$$\|x(t) - d(t)\| < \varepsilon$$

الحل نرمزله بالشكل : $x(t, t_0, x_0)$

② $d(t)$ مستقر تقاربياً (حل جاذب) اذا كان الحل مستقر ويحقق من اجل كل حل $x(t)$ بشرط ابتدائي $x(t_0)$ مع $\|x(t) - d(t_0)\| < \delta$

فإن :

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - d(t)\| = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = d(t)$$

③ $d(t)$ حل قلق اذا لم يكن مستقر

مثال : ادرس استقرار حل هذه الجملة الذي يحقق $x(0) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = -x + t$$

الحل : نحل حسب عامل التكامل

$$\mu = e^{t}$$

$$x(t) = e^{-t}\left(c + \int t e^{t} dt\right)$$

$$= c e^{-t} + t - 1$$

$$0 = x(0) = c - 1 \Rightarrow c = 1$$

$$x(t) = e^{-t} + t - 1$$

ندرس استقرار الحل ناخذ حل كيفي $d(t)$

$$d(t) = c e^{-t} + t - 1$$

$$d_0 = d(0) = c - 1$$

$$\Rightarrow c = d_0 + 1$$

$$d(t)=(d_0+1)e^{-t}+t-1$$

$$|d(t)-x(t)|$$

$$=|(d_0+1)e^{-t}+t-1-e^{-t}-t+1|$$

$$=|d_0 e^{-t}|=|d_0|e^{-t}<\delta<\varepsilon$$

نأخذ $\delta=\varepsilon$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta=\varepsilon$$

$$|d_0-x_0|<\delta$$

$$\Rightarrow |d(t)-x(t)|<\varepsilon$$

وبالتالي الحل مستقر

عندما $\lim_{t\to\infty}|d(t)-x(t)|=0$

$\Leftarrow$ الحل $x(t)$ مستقر تقاربياً

ملاحظة: اذا طلب دراسة استقرار الجملة نحل الجملة

$$x_0=x(0)=c-1$$

$$\Rightarrow c=x_0+1$$

يصبح $x(t)=(x_0+1)e^{-t}+t-1$

ونأخذ $d_0=d(0)=c-1$

$$\Rightarrow c=d_0+1$$

$$|d(t)-x(t)|=|d_0-x_0|e^{-t}$$

الحل مستقر ومستقر تقاربياً وهو حل يكفي في جميع الحلول مستقرة تقاربياً

تعريف: x_e نقطة التوازن

نقول عن النقطة x_e أنها نقطة توازن للمعادلة $x'=f(t,x)$ اذا حقق: $\{x'=0\}$ أي $\{f(t,x_e)=0\}$

نسميها نقطة شاذة أو نقطة حرجة أو نقطة ثابتة أو حل ثابت

معناه $x'=0$ مع الزمن

* كل نقطة غير شاذة نسميها نقطة عادية

الحلول الذي تبدأ بشروط ابتدائية x_e تبقى في x_e

$$x(t)=c$$

$$x_e=x(0)=c \Rightarrow x(t)=x_e$$

كيفما رحنا ان الحل يبقى ثابتاً

ملاحظات:

1. المحنيات التكاملية (المسارات) في جوار نقطة عادية هي عبارة عن اسرة من الخطوط المتوازية ولكن في جوار النقطة الشاذة تكون اكثر تعقيداً لذلك فإنه من الأكثر اهمية لنا هو دراسة المحنيات في جوار النقطة الشاذة.

2. لدراسة استقرار نقطة التوازن ندرس استقرار الحل $x(t)=x_e$

3. دراسة استقرار النقطة الشاذة للجملة $x'=f(t,x)$ ...(1) إذا لم تكن $x_e=0$ تكافئ دراسة الحل الصفري لجملة مرتبطة بهذه الجملة نحصل عليها بسحب المحاور الاحداثية الى نقطة التوازن x_e نأخذ $y(t)=x(t)-x_e$

$$y'(t)=x'(t)=f(t,x(t))$$
$$=f(t,y(t)+x_e)$$
$$=g(t,y(t))$$

وبالتالي دراسة وضع المحنيات في جوار $x_e\neq 0$ للجملة $x'=f(t,x)$

يكافئ دراسة وضع المحنيات في جوار الحل الصفري للجملة $y'=g(t,y)$

تعريف:
نعرف الجملة التفاضلية الذاتية بأنها جملة من الشكل $x'=f(x(t))$ ...(2) حيث f لا يحوي على t بشكل صريح

نظرية:
كل جملة غير ذاتية يمكن كتابتها على شكل جملة ذاتية

البرهان
نفرض $x'=f(t,x)$ ...(1)

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

نضع $t=x_{n+1}$

$$x'_{n+1}=1$$

$$x'=f(x,x_{n+1})$$

$$x'_{n+1}=1$$

أو بالشكل التالي:

$y' = g(y)$ $\qquad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$

$g(y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ 1 \end{pmatrix}$

نتيجة:

الحل الغير ذاتية ليست أكثر عمومية من الحل الذاتية لذلك سنعمل بالحل الذاتية

* خصائص حل الجمل الذاتية:

كل ثابت لصيغة يبقى حل

لتكن $\phi(t)$ حل للجملة الذاتية

$x' = f(x(t))$

1) من أجل كل ثابت c فإن الدالة $x = \phi(t+c)$ تكون أيضاً حل للجملة

$$\frac{d\,\phi(t+c)}{dt} = \phi'(t+c) = f(\phi(t+c))$$

2) إذا كان $\psi(t)$ حلاً ثاني للجملة (2) يحقق:

$\phi(t_1) = \psi(t_2)$

فإن $\psi(t) = \phi(t+c)$

$c = t_1 - t_2$

البرهان:

$\phi(t_1) = \psi(t_2)$

$t_1 = c + t_2$

$\phi(t_1) = \phi(t_2+c) = \psi(t_2)$

أصبح $\phi(t+c)$ و $\psi(t)$

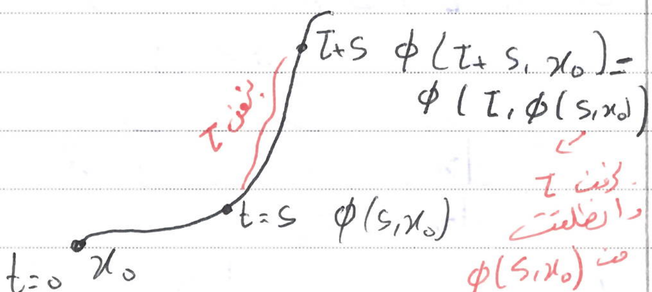
حلان متقاطعان في نفس اللحظة $t = t_2$ ⟸ حسب نظرية الوجود والوحدانية [ديكارد]

$\phi(t+c) = \psi(t)$

أياً كان t

3) إذا حقق الحل $\phi(t)$ الشرط $\phi(0) = x_0$ فإن:

$\phi(\tau+s, x_0) = \phi(\tau, \phi(s, x_0))$



حامل المسار [الحل الديكارتي]

/ /

* سندرس الحل الذاتية عندما $n = 2$: في الفضاء $\mathbb{R}^2$

$$x' = f(x(t))$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \quad (3a) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \quad (3b) \end{aligned}\right\} (3)$$

الحل لهذه الجملة هو $x_1 = x_1(t)$ و $x_2 = x_2(t)$

تمثيل الحل الوسيطي للجملة (3) وبحذف الـ t من المعادلتين السابقتين نحصل على معادلة حامل المسار في المستوي $x_1 0 x_2$ الذي ندعوه مستوي الطور

اتجاه الحركة على حامل المسار (منحني تكاملي) هو اتجاه حركة النقطة على المنحني عندما تتزايد الـ t .

ملاحظة 1 :

لإيجاد معادلة حامل المسار إما أن نحل الجملة ومن ثم نوجد العلاقة بين x_1 و x_2

أو نحسب $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1}{f_2}$ وبالتكامل نجد مباشرةً العلاقة بين x_1 و x_2 وبالتالي تم إيجاد منحني التكامل (حامل المسار)

ملاحظة 2 :

نبقى بحاجة لإيجاد الحل لتعيين اتجاه الحركة .

3 : في حال الجمل الخطية ننتج معادلة متجانسة $\frac{f_1}{f_2}$ متجانس من المرتبة 0

* ندرس الآن الجمل الذاتية الخطية المتجانسة [ذات أمثال ثابتة] $n = 2$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 \end{aligned}\right\} (4)$$

حيث $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

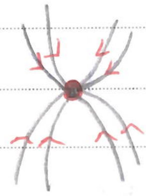
نلاحظ أن النقطة $(0,0)$ هي نقطة شاذة للجملة (4) لأنها $x_1' = 0$ و $x_2' = 0$

* انواع النقط الشاذة :

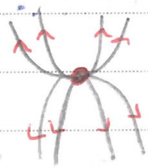
(0,0) أو $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$

① النقطة الشاذة عقدة :

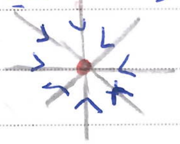
A- مستقرة : اذا كانت مسارات الحل متقاربة من هذه النقطة (0,0)



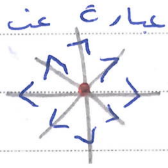
B- غير مستقرة : اذا كانت مسارات الحل تبتعد عن هذه النقطة (0,0)



C- عقدة نجمية مستقرة : اذا كانت المنحنيات عبارة عن مستقيمات وجميعها متقاربة من النقطة (0,0) Star

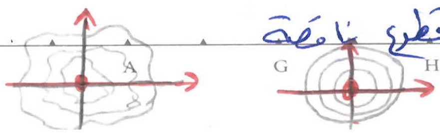


D- عقدة نجمية غير مستقرة : اذا كانت المنحنيات عبارة عن مستقيمات وجميعها تبتعد نحو النقطة



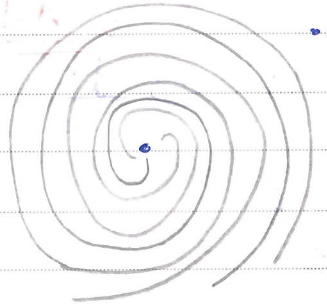
② النقطة الشاذة مركز :

تكون مسارات الحل عبارة عن خطوط مغلقة محيطة بالنقطة مثل دوائر او قطوع ناقصة

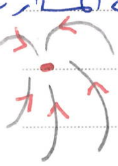


③ النقطة الشاذة [حلزونية او بؤرة]

تكون المسارات عبارة عن حلزونات لوغارتمية .



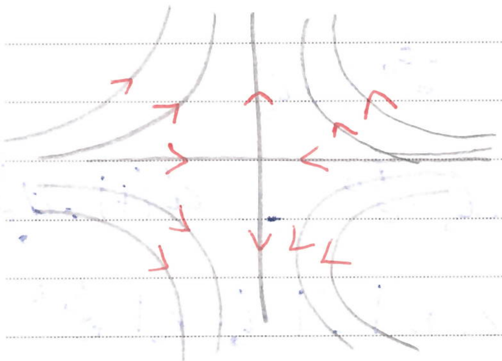
تكون مستقرة : اذا كانت المسارات تقترب من النقطة الشاذة



تكون غير مستقرة : تبتعد عن النقطة الشاذة

④ النقطة السرجية : [غير مستقرة] دائماً

اذا كانت المسارات عبارة عن قطوع زائدة



لو هناك مساران يتقاربان من النقطة الحرجة من جهتين متعاكستين اما باقي المسارات تبتعد عن النقطة الحرجة

انتهت المحاضرة

عملي المحاضرة الرابعة

السؤال الأول:

ادرس استقرار الحل $x' = -x$
الذي يحقق $x(t_0) = x_0$

الحل:

$x' = -x$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -t$

$\Rightarrow x = c e^{-t}$

$x(t_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = c\, e^{-t_0}$

$\Rightarrow c = x_0\, e^{t_0}$

$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{t_0 - t}$

لدراسة الاستقرار
نفرض حل كيفي:

$d(t) = c e^{-t}$

$d(t_0) = c e^{-t_0} = d_0$

$\Rightarrow c = d_0 \cdot e^{t_0} \Rightarrow d(t) = d_0 e^{t_0 - t}$

$|d(t) - x(t)| = |d_0 - x_0|\, e^{t_0 - t}$

$e^{t_0 - t} < 1 \Leftarrow t_0 > t$

$\Rightarrow |d(t) - x(t)| < |d_0 - x_0| < \delta$

بوضع $\delta = \varepsilon$ نجد:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$ ؛

$|d_0 - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |d(t) - x(t)| < \varepsilon$

⇐ $x(t)$ مستقر وبما انه
كيفي ⇐ جميع الحلول مستقرة

$\lim_{t \to +\infty} |d(t) - x(t)| = 0$

⇐ الحل مستقر تقاربياً

السؤال الثاني:

ادرس استقرار $x' = \frac{x}{t^2}$
$x(t_0) = x_0$
$t_0 \in]0, +\infty[$

الحل:

$\frac{dx}{x} = t^{-2}\, dt$

$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{t} + \ln c$

$\Rightarrow x = c\, e^{-\frac{1}{t}}$

$x(t_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = c\, e^{-\frac{1}{t_0}}$

$\Rightarrow c = x_0\, e^{\frac{1}{t_0}}$

$$\Rightarrow x = x_0 e^{\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t}}$$

$$d(t) = d_0 e^{\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t}}$$

$$|d(t)-x(t)| = |d_0 - x_0| e^{\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t}}$$

$$t \in]0,+\infty[\Rightarrow e^{-\frac{1}{t}} < 1$$

$$\Rightarrow |d(t)-x(t)| < \delta e^{\frac{1}{t_0}}$$

باختيار $\varepsilon = \delta . e^{\frac{1}{t_0}}$ ليتحقق

أي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon e^{-\frac{1}{t_0}} ;$$

$$|d_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |d(t)-x(t)| < \varepsilon$$

أي شرط ليبانوف محقق

السؤال الثالث:

ادرس استقرار حلول المعادلة حسب قيم a

$$x' = -\frac{a}{t} x$$

$$x(1) = 0$$

الحل:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{a}{t} dt$$

$$\Rightarrow x = c t^{-a}$$

$$x(1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x = 0$$

وهو حل المسألة

ندرس استقرار ليكن $d(t)$ حل كيفي $d(t) = c \cdot t^{-a}$

يحقق $d(1) = d_1$

$$\Rightarrow d(t) = d_1 t^{-a}$$

$$\Rightarrow |x(t)-d(t)| = |d_1| \cdot t^{-a}$$

(A) $a = 0 \Leftarrow t^{-a} = 1$

$$|x(t)-d(t)| = |d_1|$$

باختيار $\delta = \varepsilon$ نجد

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta = \varepsilon ; |d_1| < \delta$$

$$\Rightarrow |x(t)-d(t)| < \varepsilon$$

ولكن $\lim |d_1| \neq 0$

أي الحل مستقر ولكن غير مستقر تقاربيا

$\boxed{B}$ $a > 0 \Leftarrow t^{-a} < 1$

$$|d(t)-x(t)| = |t^{-a} d_1| < \delta = \varepsilon$$

$$\lim |d(t)-x(t)|$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{|d_1|}{t^a} = 0 \Rightarrow$$ مستقر تقاربيا

$a < 0$ $\boxed{C}$

$$|\phi(t) - x(t)| = |\phi_1|\, t^{-a} \to +\infty$$

الشرط غير محقق والحل غير مستقر (قلق) .

السؤال الرابع:

ادرس استقرار النقطة الشاذة للأنظمة الذاتية الخطية

$$x' = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

الحل

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_e(0,0)$ نقطة توازن .

$$\phi(t) = x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\phi_{01}\cos t + \phi_{02}\sin t}^{A} \\ \underbrace{-\phi_{01}\sin t + \phi_{02}\cos t}_{B} \end{pmatrix}$$

$$\|\phi(t) - x_e\| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$= \sqrt{\phi_{01}^2 + \phi_{02}^2} = \|\phi_0 - x_e\| < \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon \ ;$$

$$\|\phi_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|\phi(t) - x_e\| < \varepsilon \Rightarrow$$

السؤال الخامس:

ادرس استقرار النقاط الشاذة وأوجد معادلة المسارات

$$x_1' = -\frac{x_2}{2} \qquad x_2' = 2x_1$$

الحل:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 0 \\ x_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ نقطة شاذة

$$A\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp i$$

القسم الحقيقي معدوم إذن $(0,0)$ نقطة مركز مستقرة

معادلة المسارات

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{-x_2}{4x_1}$$

$$\Rightarrow 4x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 + x_2^2 = C$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{C}{2}} + \frac{x_2^2}{C} = 1$$

مجموعة قطوع ناقصة مركزها $(0,0)$ أبعادها $a = \sqrt{\frac{C}{2}},\ b = \sqrt{C}$

السؤال السادس:

ادرس استقرار النقاط الشاذة

$$x_1' = a x_1 + x_2$$

$$x_2' = -x_1 + a x_2$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 0 \\ x_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ نقطة شاذة

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ -1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$a - \lambda = \mp i$$

$$\lambda = a \mp i$$

$\boxed{\cdot}$ $a>0$ إذن $(0,0)$ بؤرة حلزونية غير مستقرة

$\boxed{\cdot}$ $a=0$ إذن مركز مستقر والمسارات عبارة عن دوائر

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2}{-x_1} \Rightarrow x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{C^2}{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = C^2$$

$\boxed{\cdot}$ $a<0$ بؤرة حلزونية مستقرة

انتهت المحاضرة

المحاضرة السابعة

2025 / 6 / 25

تعريف:

A, B مصفوفتي ثوابت

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

$$\frac{du}{dt} = Bu$$

نقول عن هاتين الجملتان أنهما متكافئتان إذا وجدت K مصفوفة غير شاذة (محددها لا يساوي الصفر) تحقق $x(t) = K u(t)$

نتيجة:

إذا كانت الجملتان السابقتان متكافئتان فإن مصفوفات الأمثال متشابهة.

$$B = K^{-1} A K$$

البرهان:

$$\frac{du}{dt} = K^{-1} \frac{dx}{dt}$$

$$= K^{-1} A x = K^{-1} A K u$$

$$\Rightarrow Bu = K^{-1} A K u$$

$$B = K^{-1} A u$$

* نظرية:

تكون النقطة $(0,0)$ مستقرة [مستقرة تقاربياً] للجملة $\frac{dx}{dt} = Ax$ إذا وفقط إذا كانت مستقرة [مستقرة تقاربياً] لجملة خطية مكافئة $\frac{dx}{dt} = Bx$

[الجمل المتكافئة لها نفس البنية في جوار $(0,0)$]

* نظرية:

لنفرض لدينا الجملة الذاتية المتجانسة

$$x' = Ax \quad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

عندئذٍ فإنه لدينا الحالات التالية:

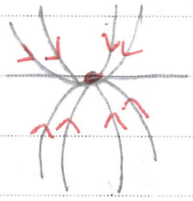
1. A تمتلك شعاعين ذاتيين حقيقيين مستقلين بقيمتين ذاتيتين λ_1, λ_2 [$\lambda_1 = \lambda_2$ أو $\lambda_1 \neq \lambda_2$]

$(*)$ تكافئ خطياً الشكل القانوني

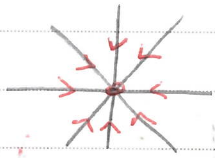
$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda_1 u \\ \frac{dv}{dt} &= \lambda_2 v \end{aligned}\right\} (*_1)$$

Nehad S A B B A G H

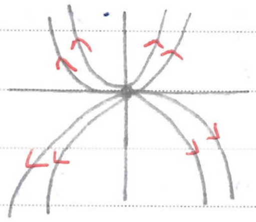
a λ_1 , λ_2 سالبان معاً فإن المبدأ (0,0) عقدة مستقرة



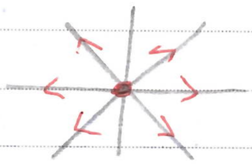
وإذا كان $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ فإن المبدأ (0,0) نقطة نجمية مستقرة



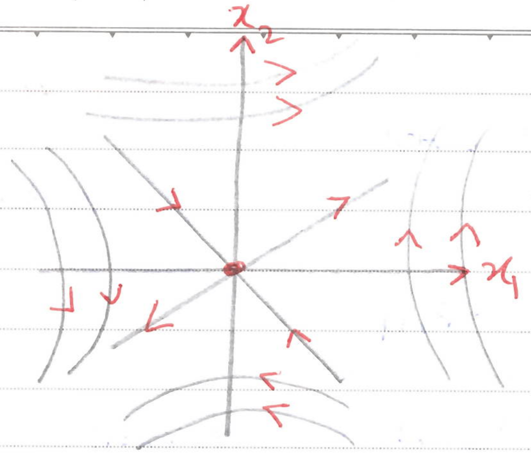
b λ_1 , λ_2 موجبان معاً فإن المبدأ (0,0) عقدة غير مستقرة

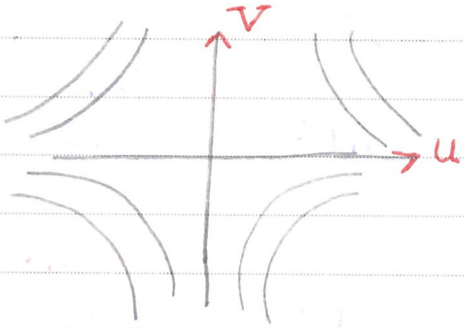


$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ المبدأ نقطة نجمية غير مستقرة

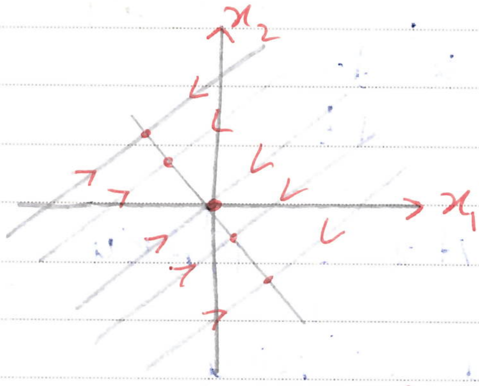


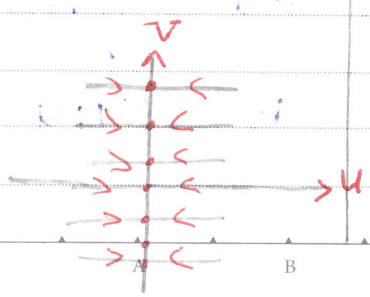
c λ_1 , λ_2 من اشارتين مختلفتين يكون المبدأ نقطة سرجية غير مستقرة



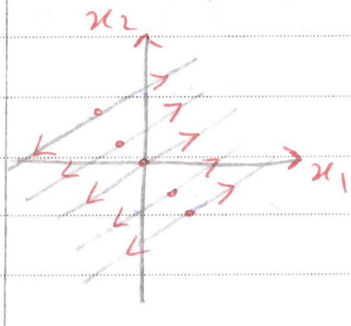


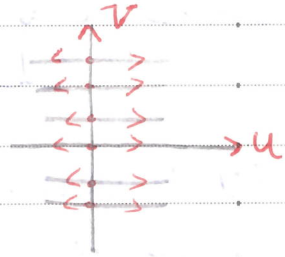
d $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$
المبدأ نقطة مستقرة ولكن غير مستقرة تقاربياً





$\boxed{E}$ $\lambda_1>0$ ، $\lambda_2=0$ المبدأ نقطة غير مستقرة





البرهان:

نفرض ان ϕ_1 , ϕ_2 الأشعة الذاتية المقابلة لـ λ_1 , λ_2

$$K=(\phi_1,\phi_2)$$

$$(A-\lambda_1 I)\phi_1=0$$

$$(A-\lambda_2 I)\phi_2=0$$

$$AK=(A\phi_1, A\phi_2)$$

$$=(\lambda_1\phi_1,\lambda_2\phi_2)=K\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=K\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}K^{-1}$$

وبالتالي $A\cong\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

تم برهان ان الجملة $(*)$ تكافئ $(*_1)$

لدراسة استقرار النقطة الشاذة للجملة $(*)$ ندرس استقرار النقطة الشاذة للجملة $(*_1)$

$$\frac{du}{dt}=\lambda_1 u \Rightarrow u=ae^{\lambda_1 t}$$

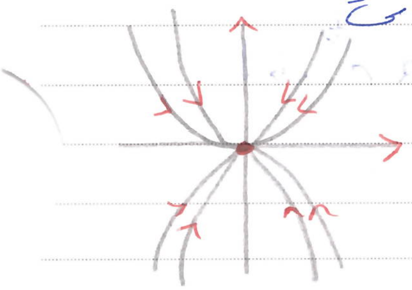
$$\frac{dv}{dt}=\lambda_2 v \Rightarrow v=be^{\lambda_2 t}$$

$$(u(t),v(t))=(ae^{\lambda_1 t},be^{\lambda_2 t}) \quad \boxed{A}$$

$$\Rightarrow u(t)=Cv^m(t) \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=m>0$$

معادلة المسارات

وبالتالي نحصل على أسرة من شكل قطوع مكافئة



$\lambda_1=-1$

$\lambda_2=-2$

$u(t)=Cv(t)$ عندئذ $\lambda_1=\lambda_2$ $\boxed{\circ}$

$$(u(t),v(t))\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}(0,0)$$

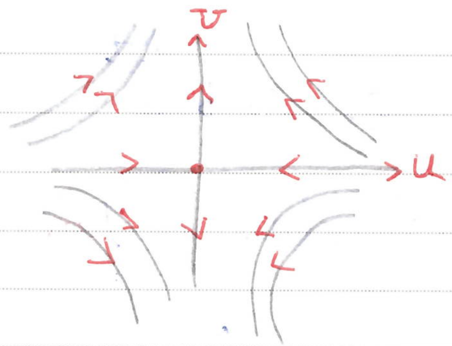
$\boxed{B}$ نفس برهان سابقة لكن المسارات تبتعد عن النقطة $(0,0)$

$$(u(t),v(t))\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}(\infty,\infty)$$

$\lambda_1 = -m\lambda_2 \Rightarrow m = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ $\boxed{C}$

$uv^m = c$

$uv = c$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

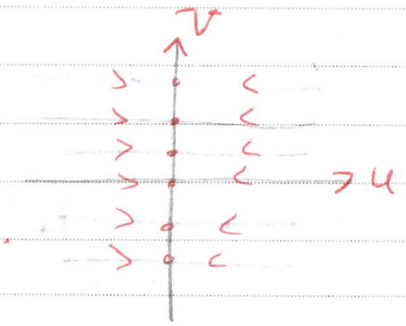


$\lambda_1 < 0$ ، $\lambda_2 = 0$ $\boxed{d}$

$(u(t), v(t)) = (a e^{\lambda_1 t}, b)$

$$\frac{dv}{du} = \frac{0}{\lambda_1 u}$$

$\Rightarrow v = b$ معادلة المسارات

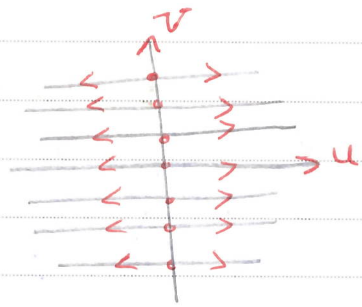


$(u(t), v(t)) \longrightarrow (0, b)$
$t \to +\infty$

$\lambda_1 > 0$ ، $\lambda_2 = 0$ $\boxed{E}$

نحصل على نفس المسارات ولكن تبتعد عن النقطة

$(u(t), v(t)) \longrightarrow (\infty, b)$
$t \to +\infty$



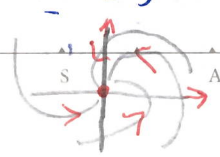
2) A لها شعاعين ذاتيين عقديين مستقلين

$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_r \mp i\lambda_j$

عندها فإن $(*)$ تكافئ

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda_r u - \lambda_j v \\ \frac{dv}{dt} &= \lambda_j u + \lambda_r v \end{aligned}\right\} (*_2)$$

$\boxed{A}$ $\lambda_r < 0$ فإن المبدأ بؤرة حلزونية مستقرة



$\boxed{B}$ $\lambda_r > 0$ المبدأ بؤرة حلزونية غير مستقرة

$\boxed{C}$ $\lambda_r = 0$ المبدأ نقطة مركز مستقرة وليست مستقرة تقاربياً

البرهان:

الشعاع الذاتي الموافق $\phi_r + i\phi_j$ لـ $\lambda_r + i\lambda_j$

$$A\phi = \lambda\phi \qquad (A - \lambda I)\phi = 0$$

$$A\phi_r + iA\phi_j = (\lambda_r + i\lambda_j)(\phi_r + i\phi_j)$$

$$A\phi_r = \lambda_r\phi_r - \lambda_j\phi_j$$

$$A\phi_j = \lambda_r\phi_j + \lambda_j\phi_r$$

$$K = (\phi_r, -\phi_j)$$

$$AK = (A\phi_r, -A\phi_j)$$

$$= (\lambda_r\phi_r - \lambda_j\phi_j, -\lambda_r\phi_j - \lambda_j\phi_r)$$

$$= K\begin{pmatrix}\lambda_r & -\lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_r\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = K\begin{pmatrix}\lambda_r & -\lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_r\end{pmatrix}K^{-1}$$

وبالتالي الجملة (*) تكافئ الجملة (*2)

$$u = \rho\cos\theta$$

$$v = \rho\sin\theta$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \cos\theta\frac{d\rho}{dt} - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \sin\theta\frac{d\rho}{dt} + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

(1) $\cos\theta\frac{d\rho}{dt} - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \lambda_r\rho\cos\theta - \lambda_j\rho\sin\theta$

(2) $\sin\theta\frac{d\rho}{dt} + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \lambda_j\rho\cos\theta + \lambda_r\rho\sin\theta$

نضرب (1) بـ $\cos\theta$ و(2) بـ $\sin\theta$ ونجمع

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda_r\rho$$

$$\Rightarrow \rho = c_1 e^{\lambda_r t}$$

نضرب (1) بـ $-\sin\theta$ و (2) بـ $\cos\theta$ ونجمع نحصل على

$$\rho\frac{d\theta}{dt} = \lambda_i \rho$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \lambda_i \Rightarrow \theta = \lambda_i t + c_2$$

A $\lambda_r < 0$ ⇐ $\rho \to 0$

⇐ $(0,0)$ مستقرة

B $\lambda_r > 0$ ⇐ $\rho \to +\infty$

⇐ $(0,0)$ غير مستقرة

C $\lambda_r = 0$ ⇐ $\rho = c$

⇐ نحصل على منحنيات مغلقة ويكون مستقرة وليست مستقرة تقاربياً

3 A لها قيمة ذاتية مكررة وشعاع ذاتي مستقل واحد وتكافئ خطياً

$$\frac{du}{dt} = \lambda u + v \qquad \frac{dv}{dt} = \lambda v \qquad (*3)$$

A $\lambda < 0$ المبدأ عقدة مستقرة

B $\lambda > 0$ المبدأ عقدة غير مستقرة

C $\lambda = 0$ المبدأ نقطة غير مستقرة

البرهان:

$(A - \lambda I)\psi = \phi$

الشعاع الذاتي المقابل λ

$A\psi = \phi + \lambda\psi$

$K = (\phi, \psi)$

$$AK = A(\phi,\psi) = (\lambda\phi, \phi + \lambda\psi) = (\phi,\psi)\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = K\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = K\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}K^{-1}$$

⇐ الجملة (*) تكافئ الجملة (*3)

$$v(t) = a e^{\lambda t}$$

$$\frac{du}{dt} = \lambda u + a e^{\lambda t}$$

$$\mu = e^{-\lambda t}$$

$$u(t) = e^{\lambda t}\left(b + \int a \, dt\right)$$

$$= b e^{\lambda t} + a t e^{\lambda t}$$

$$(u(t), v(t)) = \left(b e^{\lambda t} + a t e^{\lambda t}, a e^{\lambda t}\right)$$

$\boxed{A}$ $\lambda < 0 \Leftarrow$

$(u(t), v(t)) \to (0,0)$

عقدة مستقرة

$\boxed{B}$ $\lambda > 0 \Leftarrow$

$(u(t), v(t)) \to (\infty, \infty)$

عقدة غير مستقرة

$\boxed{C}$ $\lambda = 0 \Leftarrow$

$$(u(t), v(t)) = (b + at, a) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (\infty, a)$$

نقطة غير مستقرة

ندرس الآن بعض الجمل غير الخطية :

① جملة ذات أمثال تقريبياً ثابتة

$$x' = Ax + b(t)x \quad (**)$$

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

b تابع مستمر

$$\lim_{t \to +\infty} b(t) = 0$$

$\boxed{A}$ $(0,0)$ مستقرة بالنسبة للجملة $x' = Ax$ تكون مستقرة بالنسبة لـ $(**)$

$\boxed{B}$ $(0,0)$ مستقرة تقاربياً بالنسبة للجملة $x' = Ax$ تكون مستقرة تقاربياً لـ $(**)$

الاستقرار باستخدام التقريب الأول :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$C^1 \ni f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

نكتب f حسب منشور تايلور في جوار $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

$f_1(0,0)=0$

$f_2(0,0)=0$

$$f_1(x_1,x_2)=f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}(x_1-\bar{x}_1)+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}(x_2-\bar{x}_2)+R_1$$

باقي النشر

$$f_2(x_1,x_2)=f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}(x_1-\bar{x}_1)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}(x_2-\bar{x}_2)+R_2$$

$$x'=f(x)$$

... (2)

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

جملة خطية ذات امثال ثابتة وتمثل جملة التقريب الأول للجملة (1) وتمثل جملة المكافئ الخطي. استقرار هذه الجملة الخطية يعطينا معلومات عن استقرار الجملة (1) فإذا كان القسم الحقيقي للقيم الذاتية لمصفوفة امثال (2) أصغر تماماً من الصفر فإن استقرار (2) يعطي استقرار الجملة (1)

وإذا كان القسم الحقيقي للقيم الذاتية لمصفوفة امثال (2) موجب تماماً فإن عدم استقرار (2) يعطي عدم استقرار (1)

أما إذا كان واحدة من القيم الذاتية معدومة اي في حالة النقطة الشاذة مركز الخطي لا يعبر عن حالة الجملة غير الخطية

مثال:

$$x_1'=x_2$$

$$x_2'=-2x_2-\sin x_1$$

لنوجد النقطة الشاذة لعدم المبادلات

$\sin x_1=0$ منها $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\lambda=-1<0$ مضاعف

التربيعات المحاذة

المحاضرة الخامسة عملي

2025/6/25

السؤال الأول :

$$x_1' = 3x_1 + x_2$$

$$x_2' = x_1 + 3x_2$$

الحل

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 4$$

القيم الذاتية حقيقية موجبة وبالتالي عقدة غير مستقرة.

لإيجاد معادلة المسارات:

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\beta_1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \beta_2 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\Rightarrow x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$$

$$x_2 = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2C_2 e^{4t} \\ x_1 - x_2 &= 2C_1 e^{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2}{(x_1 - x_2)^2} = K \Rightarrow x_1 + x_2 = K(x_1 - x_2)^2$$

السؤال الثاني :

ادرس استقرار النقاط الشاذة وأوجد معادلة المسارات بالاستفادة من حقل المكافئ الخطي

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

الحل :

$$x_e (0,0)$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

حقيقية + موجبة ⇐ عقدة غير مستقرة

نوجد مسارات حقل المكافئ الخطي

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u \Rightarrow \begin{cases} u_1' = u_1 \\ u_2' = 2u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = C_1 e^{t} \qquad \Rightarrow u_2 = \frac{C_2}{C_1^2} u_1^2$$

$$u_2 = C_2 e^{2t}$$

وهي قطوع مكافئة ذروتها $(0,0)$
وتكون شكل المسارات في الجملة الأساسية
ناتجة عن تحويل خطي ما

السؤال الثالث :

نفس صيغة السؤال السابق باختلاف

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2 \Rightarrow$$ سرجية غير مستقرة

$$u' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1' = -u_1 \Rightarrow u_1 = c_1 e^{-t} \\ u_2' = 2u_2 \Rightarrow u_2 = c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{c_2}{c_1^2} u_1^{-2}$$

وهي قطوع زائدة محورها $(0,0)$

السؤال الرابع :

ادرس استقرار $(0,0)$ للجملة

$$x_1' = 2x_1 - \ln|1+x_2| + \sin x_1$$

$$x_2' = e^{x_1} + \sin(x_1+x_2) - \cos^2 x_2$$

الحل : الجملة ذاتية وغير خطية ، نوجد التقريب الخطي للجملة

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(0,0)} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + \cos x_1 & \frac{-1}{1+x_2} \\ e^{x_1} + \cos(x_1+x_2) & \cos(x_1+x_2) + 2\sin x_2 \cos x_2 \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 + i$$
$$\lambda_2 = 2 - i$$

الجزء الحقيقي للقيم الذاتية موجب
في جملة التقريب غير مستقرة
$\Leftarrow$ الجملة الأساسية غير مستقرة

السؤال الخامس :

$$x_1' = x_1 x_2 - 1$$

$$x_2' = x_1^3 x_2^2 - 1$$

الحل : $x_1' = 0 \quad , \quad x_2' = 0$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow x_e = (1,1)$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

نسحب المحاور الإحداثية إلى النقطة $(1,1)$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 1 \Rightarrow y_1' = x_1' \\ y_2 &= x_2 - 1 \Rightarrow y_2' = x_2' \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{13}}{2}$$

القيم الذاتية حقيقية مختلفة الإشارة

⇐ الجملة غير مستقرة

⇐ الجملة الأساسية غير مستقرة

انتهت المحاضرة