كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : **الخامسة/عملي/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1) ليكن السطح S المعطى بالعلاقة التالية:

$\vec{x}(u,v) = e^u \cos v\, \vec{e_1} + e^u \sin v\, \vec{e_2} + u\, \vec{e_3}$

أوجد الشكل التربيعي الأول للسطح S ثم الشكل التربيعي الثاني للسطح S.

الشكل التربيعي الأول: $I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

الشكل التربيعي الثاني: $II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$

$\vec{x_u} = e^u \cos v\, \vec{e_1} + e^u \sin v\, \vec{e_2} + \vec{e_3}$

$\vec{x_{uu}} = e^u \cos v\, \vec{e_1} + e^u \sin v\, \vec{e_2}$

$\vec{x_{uv}} = -e^u \sin v\, \vec{e_1} + e^u \cos v\, \vec{e_2}$

$\vec{x_v} = -e^u \sin v\, \vec{e_1} + e^u \cos v\, \vec{e_2}$

$\vec{x_{vv}} = -e^u \cos v\, \vec{e_1} - e^u \sin v\, \vec{e_2}$

$$\vec{x_u} \times \vec{x_v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ e^u \cos v & e^u \sin v & 1 \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-e^u \cos v)\vec{e_1} - (e^u \sin v)\vec{e_2} + e^{2u}\vec{e_3}$

$|\vec{x_u} \times \vec{x_v}| = e^u \sqrt{1 + e^{2u}}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x_u} \times \vec{x_v}}{|\vec{x_u} \times \vec{x_v}|}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2u}}}\left(-\cos v\,\vec{e_1} - \sin v\,\vec{e_2} + e^{u}\,\vec{e_3}\right)$$

$$E = x_u^2 = e^{2u} + 1$$

$$F = x_u\, x_v = 0$$

$$G = x_v^2 = e^{2u}$$

$$L = x_{uu}\, n = \frac{-e^{u}}{\sqrt{1+e^{2u}}}$$

$$M = x_{uv}\, n = 0$$

$$N = x_{vv}\, n = \frac{e^{u}}{\sqrt{1+e^{2u}}}$$

$$I = (e^{2u}+1)\,du^2 + (e^{2u})\,dv^2$$

$$II = \left(\frac{-e^{u}}{\sqrt{1+e^{2u}}}\right)du^2 + \left(\frac{e^{u}}{\sqrt{1+e^{2u}}}\right)dv^2$$

[2] أوجد التقوس الناظمي Kn للمنحني: $u = t^2 \quad v = t$

المرسوم على السطح $r = (u, v, u^2 + v^2)$

وذلك من النقطة الموافقة لـ $t = 1$.

الحل التقوس الناظمي:

$$Kn = \frac{II}{I} = \frac{L\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + N\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

$$r_u = (1, 0, 2u)$$

$$r_{uu} = (0, 0, 2)$$

$$r_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$r_v = (0, 1, 2v)$$

$$r_{vv} = (0, 0, 2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$r_u \times r_v = (-2u, -2v, 1)$

$|r_u \times r_v| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$

$n = \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u, -2v, 1)$

$E = r_u^2 = 1 + 4u^2$

$F = r_u r_v = 4uv$

$G = r_v^2 = 1 + 4v^2$

$L = r_{uu}\, n = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$ $\quad M = r_{uv}\, n = 0$

$N = r_{vv}\, n = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$

نعوض في K_n ما يلي :

$E|_{t=1} = 5$, $F|_{t=1} = 4$, $G|_{t=1} = 5$

$L|_{t=1} = \frac{2}{3}$, $M|_{t=1} = 0$, $N|_{t=1} = \frac{2}{3}$

$\frac{du}{dt}\Big|_{t=1} = 1$ $\qquad$ $\frac{dv}{dt}\Big|_{t=1} = 1$

$K_n = \frac{\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3}}{5+8+5} = \frac{4}{54}$

3. ليكن السطح المعطى بالشكل :

$\vec{x} = (u+v)\vec{e_1} + (u-v)\vec{e_2} + (u.v)\vec{e_3}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أوجد الزاوية الكائنة بين المنحنيات ذات الوسيط u و المنحنيات ذات الوسيط v من النقطة الموافقة لـ

$u = 1$ ، $v = 1$

$\vec{x_u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + v\,\vec{e_3}$ ل1

$\vec{x_v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + u\,\vec{e_3}$

$E = x_u^2 = 2 + v^2 > 0$ $\quad E(1,1) = 3$

$F = x_u x_v = uv > 0$ $\quad F(1,1) = 1$

$G = x_v^2 = 2 + u^2 > 0$ $\quad G(1,1) = 3$

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{\sqrt{3}\,3} = \frac{1}{3}$$

$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

4 وظيفة : اعسب الشكل التربيعي الأول و الثاني للسطح المعطى بالمثيل :

$\vec{x} = u\,\vec{e_1} + v\,\vec{e_2} + (4u^2 + v^2)\,\vec{e_3}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z