كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

دراسة سطح بجوار نقطة

ليكن $r(u,v)$ سطح نظامي ولتكن p نقطة من السطح S و Q نقطة مجاورة لـ p ولتكن:

$p = \vec{r}(u,v)$

$Q = \vec{r}(u+du, v+dv)$

$d = pQ \cdot \vec{N}$

d تعني مرتسم (مسقط) pQ على الناظم $\vec{N}$ على السطح

نسمي التابع:

$$\delta = \frac{1}{2}\,\mathrm{II} = \frac{1}{2}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2)$$

δ المجسم الملاصق للسطح في النقطة p

إن طبيعة المجسم الملاصق بجوار النقطة p تحدد طبيعة السطح في جوار p، بين الحالات التالية:

① إذا كان $LN - M^2 > 0$ النقطة p ناقصية أي δ مجسم ناقصي و δ يحافظ على نفس الإشارة و السطح يقع على جانب واحد من المستوي المماس في النقطة p.

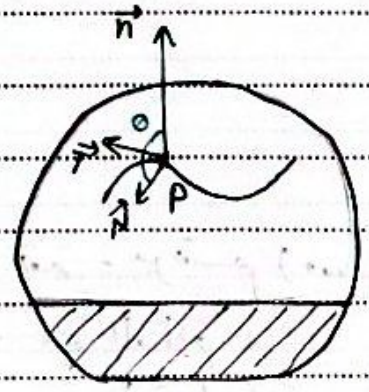
② إذا كان $LN - M^2 < 0$ النقطة p زائدية أي في هذه الحالة δ مجسم زائدي و δ يغير إشارته و السطح يقع على جانبي المستوي المماس في p.

③ إذا كان $LN - M^2 = 0$ النقطة p مكافئية و إذا كان $L^2 + N^2 + M^2 = 0$ يكون S عبارة عن أسطوانة مكافئية و السطح يقع بجهة واحدة بالنسبة للمستوي المماس.

④ النقطة p مستوية $LN - M^2 = 0$

$L = M = N = 0$ في هذه الحالة السطح جميع نقاطه مستوية (مستوي).

القوس الناظمي للسطح



ليكن لدينا السطح النظامي $r(u, v)$

وليكن $u = u(s)$ ، $v = v(s)$

يعني نظامي واقعاً على هذا السطح

ويمر بالنقطة $p(u_0, v_0)$

θ الزاوية بين $\vec{n}$ ناظم السطح في النقطة p و الناظم الأساسي $\vec{N}$ للمنحني في النقطة p.

برهنة مونيه

إن المقدار $k \cos\theta$ ثابت من أجل جميع المنحنيات الواقعة على السطح و المارة من النقطة و التي لها في هذه النقطة مماس واحد.

البرهان لنأخذ الجداء السلمي $r'' n$ فنجد:

$$r'' n = |r''| |n| \cos\theta = k \cos\theta$$

من جهة ثانية:

$$r' = r_u u' + r_v v'$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$r'' = (r_{uu}u' + r_{vu}v')u' + r_u u''$$
$$+ (r_{uv}u' + r_{vv}v')v' + r_v v''$$
$$= r_{uu}u'^2 + 2r_{uv}v'u' + r_{vv}v'^2 + r_v v'' + r_u u''$$

$$(r_v)' = r_{uv}u'$$

$$(r_u)' = r_{uu}u'$$

المطلوب هو: $r'' n$

$$\vec{r_u}\ \vec{n} = 0 \quad , \quad \vec{r_v}\ \vec{n} = 0$$

$$r'' n = r_{uu} n u'^2 + 2 r_{uv} n u'v' + r_{vv} n v'^2 + 0 + 0$$

$$r'' n = L\frac{du^2}{ds^2} + 2M\frac{du\,dv}{ds^2} + N\frac{dv^2}{ds^2}$$

$$= \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}$$

$$r'' n = \frac{II}{I} = K\cos\theta$$

الطرف الثاني متعلق بـ II و I وهذا يتعلق فقط بـ du, dv وعند منحنٍ معين يبقى المقدار ثابت.

تعريف: نسمي المقدار الثابت $K\cos\theta = \frac{II}{I}$ التقوس الناظمي للسطح في p وفق المنحني (du, dv)

التقوس الناظمي هو تقوس المنحني الناتج عن تقاطع المستوي الذي يحوي الشعاعين $\vec{T}$ و $\vec{N}$ مع السطح.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المقاطع العاتية و المائلة

ليكن $r(u,v)$ سطحاً نظامياً وليكن p مستوياً ماراً من النقطة M الواقعة على السطح.

إن تقاطع p مع السطح سيعطي مقطع S من M (وهو منحني)

إذا كان المستوي حاوياً الناظم على السطح $\vec{n}$ سمي مقطع قائم ومن غير ذلك سمي مقطع مائل

التقوسات الأساسية و المعاملات الأساسية

تعريف: سمي التقوس الناظمي بـ تقوس أساسي إذا كان يملك k_n قيمة كبرى k_2 أو قيمة صغرى k_1.

لإيجاد التقوس الناظمي الأساسي نشتق العلاقة $k_n = \frac{II}{I}$

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial du} = \frac{(2L\,du + 2M\,dv)I - (2E\,du + 2F\,dv)II}{I^2} = 0$$

كذلك الأمر $\frac{\partial k_n}{\partial dv} = 0$

$$(2L\,du + 2M\,dv)I - (2E\,du + 2F\,dv)II = 0$$

نقسم الطرفين على $2I$

وبحذف du و dv من المعادلتين السابقتين نحصل على شكل التقوس الناظمي:

$$\frac{L - E k_n}{M - F k_n} = \frac{M - F k_n}{N - G k_n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$(L - E k_n)(N - G k_n) = (M - F k_n)^2$$

هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ k_n

$$(EG - F^2) k_n^2 - (EN + LG - 2MF) k_n + (LN - M^2) = 0$$

مميزها أكبر من الصفر بالتالي لها حلان هما:

التقوسان الأساسيان

للحصول على المنامي الأساسية نحذف k_n من المعادلتين:

$$\frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv}$$

بالنشر:

$$(LF - EM)\,du^2 + (LG - EN)\,du\,dv + (MG - FN)\,dv^2 = 0$$

ومنها نحصل على المنامي الأساسية

تعريف: نسمي العدد $K = k_1 . k_2$ التقوس التام للسطح

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$ (تقوس غاوس)

ونسمي المقدار $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ التقوس الوسطي

ملاحظة k_1 و k_2 هما جذرا المعادلة

$$\begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0$$

$$k_1 + k_2 = \frac{LG + NE - F^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{LG + NE - F^2}{EG - F^2}\right]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: احسب التقوس التام للسطح الدوراني:

$r(u,v) = (x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v))$

سطح دوراني ناتج عن دوران $x = x(v)$

$z = z(v)$

حيث v وسيط طبيعي للمنحني.

الحل

$x'^2_v + z'^2_v = 1$

$r_u = (-x(v)\sin u, x(v)\cos u, 0)$

$r_v = (x'(v)\cos u, x'(v)\sin u, z'(v))$

$E = r_u^2 = x^2(v)$

$F = r_u r_v = 0$

$G = r_v^2 = x'^2(v) + z'^2(v) = 1$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x\sin u & x\cos u & 0 \\ x'\cos u & x'\sin u & z' \end{vmatrix}$$

$= (xz'\cos u, xz'\sin u, -xx')$

$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{EG - F^2} = x$

$\vec{n} = (z'\cos u, z'\sin u, -x')$

$r_{uu} = (-x(v)\cos u, -x(v)\sin u, 0)$

$r_{uv} = (-x'(v)\sin u, x'(v)\cos u, 0)$

$r_{vv} = (x''(v)\cos u, x''(v)\sin u, z''(v))$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$L = r_{uu}\, n = x z'$

$M = r_{uv}\, n = 0$

$N = r_{vv}\, n = x'' z' - x' z''$

التقوس التام :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{z'(x'z'' - x''z')}{x'}$$

التقوس التام للكرة :

$$x = R \cos\frac{v}{R}$$

$$z = R \sin\frac{v}{R}$$

$$K = \frac{\cos(v/R)}{\sin(v/R)} \quad \begin{vmatrix} -\sin\frac{v}{R} & \cos\frac{v}{R} \\ -\frac{1}{R}\cos\frac{v}{R} & -\frac{1}{R}\sin\frac{v}{R} \end{vmatrix}$$

$$K = \frac{1}{R^2}$$

التقوس التام للكرة ثابت و موجب دائماً

و إذا كان $-\frac{1}{R^2}$ يسمى سطح كرة :

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة