كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : **السادسة/عملي/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول هام جداً:

X مجموعة ما غير معدودة و: $M=\{A\in 2^X ;\ A \text{ أو } \bar{A} \text{ معدودة}\}$

جبر تام في X ولنعرف على M دالة مجموعة $\mu: M\to \bar{\mathbb{R}}^+$ بالشكل:

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & ;\ A \text{ معدودة}\\ 1 & ;\ \bar{A} \text{ معدودة}\end{cases}$$

والمطلوب:

تحقق أنّ (μ, M, X) فضاء قياس؟

الحل: لنتحقق من أنّ μ تابع قياس على M

أ) $\mu(A)\geq 0$ من تعريف μ أي أنّ μ دالة غير سالبة.

ب) $\mu(\emptyset)=0$ لأنّ $\emptyset$ منتهية فهي معدودة.

ج) A_i متتالية من عناصر A غير المتقاطعة ولنبرهن أنّ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ «خاصة الجمعية التامة»

لدينا احتمالان:

الاحتمال الأول: $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ معدود $\Leftarrow$ A_i معدودة حيث $i=1,2,\dots$

في هذه الحالة $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=0$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\mu(A_1)+\mu(A_2)+\dots+\mu(A_n)+\dots=0+0+\dots+0+\dots=0$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=0=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=0$$

الاحتمال الثاني:

$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ غير معدود أي أنّ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=1$ $\bigcup A_i$ معدودة.

بما أنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ غير معدود توجد مجموعة واحدة فقط من المجموعات (A_i) غير معدودة ولتكن (A_{i_0}) غير معدودة حيث $\bar{A}_{i_0}$ معدودة.

لأنّه لو فرضنا A_{i_1} غير معدودة فيكون $\bar{A}_{i_1}$ معدودة $A_{i_0} \cap A_{i_1} = \phi$

وبالتالي: $A_{i_1} \subset \bar{A}_{i_0}$

ولتكن A_{i_1} غير معدودة وبالتالي $\bar{A}_{i_0}$ غير معدودة وهذا مناقض للفرض

$$\mu(\bigcup A_i) = 1$$

$$\sum \mu(A_i) = \mu(A_{i_0}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 1 + 0 = 1$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

بعد مناقشة الشروط نجد أنّ $\mu(A)$ دالة قياس.

التمرين الثاني X مجموعة ما غير منتهية $\{a_1, a_2, \dots\}$ ولنفرض $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ متسلسلة ذات حدود غير سالبة ومجموعها $= 1$ ولنعرّف μ دالة مجموعة

$$\mu : p(x) \to \bar{R}^+$$

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{a_i \in A} b_i & ; \ A \cap \{a_1, a_2, \dots\} \neq \phi \\ 0 & ; \ A \cap \{a_1, a_2, \dots\} = \phi \end{cases}$$

المطلوب: تحقّق أنّ μ دالة قياس على $p(x)$. وأنّ $\mu(x) = 1$ وماذا نسمّي هذا القياس؟

الحل: من تعريف μ نلاحظ أنّ $\mu(A) \geq 0$ أي أنّ μ دالة غير سالبة $\forall A \in p(x)$

$\mu(\phi) = 0 \quad ; A = \phi \quad \phi \cap \{a_1, a_2, \dots\} = \phi$

A_i متتالية من عناصر $p(x)$ غير المتقاطعة ويبقى نبرهن أنّ:

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ خاصة الجمعيّة التامّة

نناقش حالتين:

الحالة (1): $\bigcup A_i \cap \{a_1, a_2, \dots\} \neq \phi$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{a_i \in \bigcup A_i} b_i = \sum_{a_i \in A_1} b_i + \sum_{a_i \in A_2} b_i + \sum_{a_i \in A_3} b_i + \dots$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots = \sum \mu(A_i)$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

الحالة (2): $UA_i \cap \{a_1, a_2, \dots\} = \phi$

$\mu(\bigcup A_i) = 0$

$\sum \mu(A_i) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$

$\Rightarrow \mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$

بعد مناقشة الشروط السّابقة نجد أنّ μ دالة قياس

• اثبات أنّ: $\mu(X) = 1$: لدينا: $X \cap \{a_1, a_2, \dots\} \neq \phi$

$\mu(X) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1$

حسب ما سبق وجدنا $(X, 2^X, \mu)$ فضاء قياس $\mu(X) = 1$.

نسمي كل قياس μ حيث $\mu(X) = 1$ قياس احتمالي ونسمي الفضاء $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء احتمالي.

التمرين الثالث: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس و $\mu(A \Delta B) = 0$ برهن أنّ:

$\mu(A) = \mu(B)$ ؟

الحل:

$A = (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow$

$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B)$

$B = (B - A) \cup (A \cap B) \Rightarrow \mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A \cap B)$

بالجمع:

$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A - B) + \mu(B - A) + 2\mu(A \cap B)$

$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \Delta B) + 2\mu(A \cap B)$

بما أنّ من الفرض $\mu(A \Delta B) = 0$ بالتّالي:

$\mu(A) + \mu(B) = 0 + 2\mu(A \cap B)$

$\mu(A) + \mu(B) = 2\mu(A \cap B)$ (*)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$A \cap B \subseteq A \Rightarrow \mu(A \cap B) \leq \mu(A) \Rightarrow 2\mu(A \cap B) \leq 2\mu(A)$

بالتعويض في (*)

$\mu(A) + \mu(B) \leq 2\mu(A)$

$\Rightarrow \boxed{\mu(B) \leq \mu(A)} \quad \ldots ①$

كما أنّ: $A \cap B \subseteq B$

$\mu(A \cap B) \leq \mu(B)$

$2\mu(A \cap B) \leq 2\mu(B)$

بالتعويض في (*)

$\mu(A) + \mu(B) \leq 2\mu(B)$

$\boxed{\mu(A) \leq \mu(B)} \quad \ldots ②$

من ① و ② نجد أنّ:

$\mu(A) = \mu(B)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z