كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٤

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• مفاهيم تتعلق قياس ما:

ليكن (X, D, μ) فضاء قياس مفروض ولنضع:

$\bar{D} = \{E \subseteq X ; E = A \cup B ; A \in D$ and B مجموعة μ - هملة$\}$

ولنعرّف على الصّف $\bar{D}$ دالة المجموعة $\bar{\mu}$ بالشكل التّالي

$\forall E \in \bar{D} ; \bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$

ولنبرهن أنّ: 1- $\bar{D}$ حبر تام في X يحوي D

2- $\bar{\mu}$ دالة معرّفة جيّداً على $\bar{D}$ وهي دالة قياس.

3- $\bar{\mu}$ قياس تام.

4- μ قياس تام إذا وفقط إذا كان $\bar{\mu} = \mu$

البرهان: • برهان (1): لنثبت أنّ D حبر تام في X يجب أن نثبت أنّ $\bar{D}$ يحقّق شروط الحبر التّام:

① إنّ $\phi \in \bar{D}$ لأنّه: $\phi = \phi \cup \phi$ حيث $\phi \in D$ (لأنّ D حبر تام في X) ϕ الأولى

أيضاً ϕ الثانية مجموعة μ - هملة لأنّه $\mu(\phi) = 0$ و $\phi \in D$ و $\phi \subseteq \phi$

كذلك فإنّ $X \in \bar{D}$ لأنّ:

$X = X \cup \phi$; $X \in D$ (لأنّ D حبر في X)

و ϕ مجموعة μ هملة لأنّ $\phi \subseteq \phi$ و $\mu(\phi) = 0$

② لنبرهن أنّ $\bar{D}$ مغلق بالنّسبة لعملية الاجتماع المعدود أي لنبرهن أنّه:

$\forall (E_i)_{i \geq 1} = (A_i \cup B_i)_{i \geq 1}$; $E_i \in D$; $i = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \bar{D}$

بما أنّ $E_i = A_i \cup B_i$ من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ وبالتّالي فإنّ

$A_i \in D$ و B_i مجموعة من $\mathcal{M}$ - هموليّة وذلك من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ وذلك وفقاً لتعريف $\bar{D}$

لدينا:

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \in \bar{D}$$

$D \supset$ مجموعة من $\mathcal{M}$ - هموليّة (برهنّا سابقاً) لأنّ $\bar{D}$ جبر تام في X

لأنّ الاجتماع العدود لمجموعات من $\mathcal{M}$ - هموليّة هي مجموعة من $\mathcal{M}$ - هموليّة.

و $\bar{D}$ مغلق بالنّسبة لعمليّة الاجتماع العدود.

③ نبرهن أنّ $\bar{D}$ مغلق بالنّسبة لعمليّة المتمّمة: أي:

$$\forall E = A \cup B \in \bar{D} \Rightarrow \bar{E} = \overline{A \cup B} \in \bar{D}$$

بما أنّ $E = A \cup B \in \bar{D}$ وبالتّالي حسب تعريف $\bar{D}$ فإنّ:

$\exists c \in D \; ; \; B \subseteq c \; \& \; \mu(c) = 0$ وبالتّالي: $A \in D$ و B مجموعة من $\mathcal{M}$ - هموليّة

لدينا $\bar{E} = \overline{A \cup B} = X - (A \cup B) = (\bar{c} \cup c) - (A \cup B) = (\bar{c} \cup c) \cap (\overline{A \cup B})$

$= (\bar{c} \cup c) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = (\bar{c} \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (c \cap \bar{A} \cap \bar{B})$

$= (\bar{c} \cap \bar{B} \cap \bar{A}) \cup (c \cap \bar{A} \cap \bar{B})$

$= (\bar{c} \cap \bar{A}) \cup (c \cap (\bar{A} \cap \bar{B}))$

بالتّالي $B \subseteq c$ لأنّ $\bar{c} = \bar{c}$

$\bar{c} \subseteq \bar{B}$

بما أنّ $A \in D$ و $c \in D$

$\Leftarrow$ $\bar{A} \in D$ و $\bar{c} \in D$ لأنّ D جبر تام في X وبالتّالي $\bar{c} \cap \bar{A} \in D$

بقي علينا أن نبرهن أنّ المجموعة $c \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$ هي مجموعة من $\mathcal{M}$ - هموليّة.

لدينا: $c \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) \subseteq c$ و $c \in D$ و $\mu(c) = 0$

إذاً المجموعة $c \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$ هي مجموعة من $\mathcal{M}$ - هموليّة وبالتّالي $\bar{E} \in \bar{D}$

و $\bar{D}$ مغلق بالنّسبة لعمليّة المتمّمة.

من ① و ② و ③ نجد أنّ $\bar{D}$ جبر تام في X. بقي علينا أن نبرهن أنّ:

$D \subseteq \bar{D}$:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall A \in D \Rightarrow A = A \cup \phi$; $A \in D$ and ϕ مجموعة μ هولة (برهنة سابقاً)

$\Rightarrow A \in \bar{D} \Rightarrow D \subseteq \bar{D}$

■ برهان (2) : لنثبت أنّ $\bar{\mu}$ معرّفة جيداً وهي دالة قياس على $\bar{D}$. حتّى نبرهن أنّ $\bar{\mu}$ معرّفة جيداً على $\bar{D}$ يجب أن نبرهن أنّ :

$E = A \cup B \in \bar{D}$ حيث E مستقل عن الشكل الذي نعبّر به عن المجموعة $\bar{\mu}(E)$

من أجل ذلك لنفرض أنّ $E = A_1 \cup B_1 = A \cup B$

حيث A_1 و A_2 من D و B_1 و B_2 مجموعات μ ـ هولتان

$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in D$ and $B_1 \subseteq c_1$ و $B_2 \subseteq c_2$ & $\mu(c_1) = 0$, $\mu(c_2) = 0$

ولنبرهن أنّ : $\bar{\mu}(A_1 \cup B_1) = \bar{\mu}(A_2 \cup B_2)$

أي لنبرهن أنّ : $\mu(A_1) = \mu(A_2)$

لدينا $A_1 \subseteq A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 \subseteq A_2 \cup c_2$

$\Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup c_2) \leq \mu(A_2) + \mu(c_2)$

وبكن $\mu(c_2) = 0$ ومنه : $\boxed{\mu(A_1) \leq \mu(A_2)}$ ... ①

كذلك فإنّ $A_2 \subseteq A_2 \cup B_2 = A_1 \cup B_1 \subseteq A_1 \cup c_1$

$\Rightarrow \mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup c_1) \leq \mu(A_1) + \underbrace{\mu(c_1)}_{=0}$

$\Rightarrow \boxed{\mu(A_2) \leq \mu(A_1)}$ ... ②

من ① و ② نجد أنّ $\mu(A_1) = \mu(A_2)$

$\Rightarrow \bar{\mu}(A_1 \cup B_1) = \bar{\mu}(A_2 \cup B_2)$

و $\bar{\mu}$ معرّفة جيداً على $\bar{D}$

يبقى علينا أن نبرهن أنّ $\bar{\mu}$ دالة قياس على $\bar{D}$: نلاحظ من تعريف $\bar{\mu}$ أنّها دالة مجموعة . الآن نتحقق من شروط القياس :

أ- إنّ : $\forall E = A \cup B \in \bar{D}$ $\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A) \geq 0$ وذلك

إذاً $\bar{\mu}$ دالة موجبة غير سالبة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب- $\bar{\mu}(\phi) = \bar{\mu}(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) = 0$

$\phi \in D$ ← مجموعة μ قابلة للجمع.

ج- خاصة الجمعية التّامة: لتكن: $(E_i)_{i\geq 1} = (A_i \cup B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $\bar{D}$ غير المتقاطعة مثنى مثنى: $A_i \in D$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$ وهي غير متقاطعة و B_i مجموعة μ مهملة من أجل $i = 1, 2, \ldots$

ولنبرهن أنّ: $\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i)$

لدينا $\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i)\right) = \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) =$ ↓ حسب تعريف μ

$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in D$

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cup B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i)$

↓ μ محققة خاصة الجمعية التّامة

وخاصة الجمعية التّامة محقّقة من أجل $\bar{\mu}$.

برهان (3): حتّى نبرهن أنّ القياس μ قياساً تاماً: نأخذ $Z \subset X$ مجموعة $\bar{\mu}$ مهملة كيفية من X ولنبرهن أنّها مجموعة $\bar{\mu}$ - قيوسة أي لنبرهن أنّ $Z \in \bar{D}$.

لدينا $Z = \phi \cup Z$ حيث $\phi \in D$ أي ϕ مجموعة μ - قيوسة

يبقى علينا أن نثبت أنّ Z هي مجموعة $\bar{\mu}$ مهملة حتّى نثبت أنّ $Z \in \bar{D}$.

بما أنّ $Z \subset X$ هي مجموعة $\bar{\mu}$ - مهملة أي:

$\exists\ E = A \cup B \in \bar{D}\ ;\ Z \subset A \cup B = E$ and $\bar{\mu}(A \cup B) = 0$

$\Rightarrow \mu(A) = 0$ ← حسب تعريف μ

وبما أنّ $E = A \cup B \in \bar{D}$ وبالتالي $A \in D$ و B مجموعة $\bar{\mu}$ - مهملة

$\Rightarrow \exists\ C \in D\ ;\ B \subset C\ \&\ \mu(C) = 0$

أصبح لدينا $Z \subset A \cup B \subset A \cup C \in D$

يبقى علينا أن نبرهن أنّ $\mu(A \cup C) = 0$ لدينا

$0 \leq \mu(A \cup C) \leq \mu(A) + \mu(C)$

$\mu(A \cup c) = 0 \Leftarrow \mu(c) = 0 \ \& \ \mu(A) = 0$ بكن

أي أنّ Z هي مجموعة μ هموله إذاً $Z = \phi \cup Z$ (ما $\leftarrow$ مجموعة μ هموله، $\phi \neq 0$)

$Z \in \bar{D}$ أي μ قتوسة $\leftarrow Z$ مجموعة

وبما أنّ كل مجموعة $\bar{\mu}$ هموله كيفية في X هي مجموعة $\bar{\mu}$ قتوسة أي هي عنصر من $\bar{D}$ بالتالي $\bar{\mu}$ قياس تام.

بالإضافة لذلك فإنّ $Z \subseteq A \cup B$

$$\Rightarrow 0 \leq \bar{\mu}(Z) \leq \bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\mu}(Z) = 0$$

قياس أي مجموعة قتوسة بالنسبة لـ $\bar{\mu}$ هو صفر.

• برهان (4): μ قياس تام إذا وفقط إذا كان $\bar{\mu} = \mu$

نزوم الشرط: نفرض: μ قياس تام

المطلب: $\bar{\mu} = \mu$

حتّى نبرهن أنّ $\bar{\mu} = \mu$ يجب أن نبرهن أنّ $D = \bar{D}$ لدينا من المطلب ①

$D \subseteq \bar{D}$ ⑧ بقي علينا أن نبرهن أنّ $\bar{D} \subseteq D$.

$E = A \cup B \in \bar{D} \Rightarrow A \in D$ and B مجموعة μ هموله $\forall$

$\Rightarrow A \in D$ and $B \in D$ ($\because \mu$ قياس تام)

$\Rightarrow E = A \cup B \in D$ لأنّ D جبر تام في X

$$\Rightarrow \boxed{\bar{D} \subseteq D} \quad (\ast\ast)$$

من ⑧ و $(\ast\ast)$ نجد أنّ $D = \bar{D}$

بقي علينا أن نبرهن أنّ $\mu = \bar{\mu}$.

لدينا $A \subseteq A \cup B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \underbrace{\mu(B)}_{=0}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(A \cup B) = \mu(A)} \quad I$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومن جهة أخرى :

$\forall E = A \cup B \in \bar{D} \Rightarrow \boxed{\bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A)}$ (II)

من (I) و (II) نجد أنّ :

$\bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A \cup B) \Rightarrow \mu = \bar{\mu}$

كفاية الشرط : المعطى : $\bar{\mu} = \mu$

المطلب : μ قياس تام

بما أنّ $\mu = \bar{\mu}$ و $\bar{\mu}$ قياس تام من المطلب السابق إذاً μ قياس تام

انتهت المحاضرة الأخيرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z